

Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Definition der natürlichen Zahlen

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

Satz: Es existiert genau eine Teilmenge $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, für die gilt:

- (i) $1 \in \mathbb{N}$.
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N} : n + 1 \in \mathbb{N}$.
- (iii) Ist $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $\forall n \in M : n + 1 \in M$, so gilt $M = \mathbb{N}$.

Die Menge $\mathbb{N}$ heißt *Menge der natürlichen Zahlen*.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Um zu zeigen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, kann man wie folgt vorgehen:

1. Der *Induktionsanfang*: Zeige $A(1)$.
2. Der *Induktionsschritt*: Zeige für beliebiges $n \in \mathbb{N}$: Aus $A(n)$ folgt $A(n + 1)$.

Warum reicht das bereits aus, um $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen? Antwort: Setzt man $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ gilt}\}$, so gilt $1 \in M$ nach dem Induktionsanfang und $\forall n \in M : n + 1 \in M$ nach dem Induktionsschritt. Da außerdem $M \subset \mathbb{N}$ gilt, folgt mit obigem Satz, dass $M = \mathbb{N}$ ist. Das bedeutet: Die Menge aller $n \in \mathbb{N}$, für die $A(n)$ gilt, ist die Menge aller natürlichen Zahlen, kurz: $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Varianten:

- Zeige im Induktionsschritt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$: Aus $A(n - 1)$ folgt $A(n)$.
- Zeige im Induktionsschritt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$: Aus $A(1), A(2), \dots, A(n)$ folgt $A(n + 1)$ (sogenannte *starke Induktion*).
- Ist $A(n)$ sogar für $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ oder nur für $n \geq m$, $m \in \mathbb{N}$, zu zeigen,
 - so zeige im Induktionsanfang $A(0)$ bzw. $A(m)$
 - und im Induktionsschritt für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ bzw. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$: Aus $A(n)$ folgt $A(n + 1)$.

Beispiel 1

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$.

Beweis durch Induktion nach n :

Induktionsanfang: $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = \sum_{k=1}^1 (2k - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 = n^2$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte die *Induktionsvoraussetzung* (IV) $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$. Es folgt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) + (2(n + 1) - 1) \stackrel{(IV)}{=} n^2 + (2(n + 1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Nach dem Induktionsprinzip gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Beispiel 2

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Beweis durch Induktion nach n :

Induktionsanfang: $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0 = 2^n$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte die Induktionsvoraussetzung $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) + 1 = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + 1 \\ &\stackrel{j=k-1}{=} \binom{n}{n} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + \binom{n}{0} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \stackrel{(IV)}{=} 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \end{aligned}$$

Nach dem Induktionsprinzip gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □