

Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, U , V und W $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{K}} U = l$, $\dim_{\mathbb{K}} V = m$ und $\dim_{\mathbb{K}} W = n$ und $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_l\}$, $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_m\}$, $\mathcal{B}'_V = \{v'_1, \dots, v'_m\}$, $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_n\}$ und $\mathcal{B}'_W = \{w'_1, \dots, w'_n\}$ Basen der jeweiligen Vektorräume.

Definitionen

- Matrix einer linearen Abbildung:

Die Matrix der linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ bzgl. $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ ist die Matrix

$$\Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f) = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \quad \text{mit} \quad f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i, \quad j = 1, \dots, m$$

- Matrix eines Basiswechsels:

Die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}_V$ nach $\mathcal{B}'_V$ ist die Matrix $T_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}'_V} := \Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}'_V}(\text{id}_V)$.

Darstellung in Diagrammen

Allgemein sei die Abbildung $\psi_{\mathcal{B}_V}$ wie folgt definiert:

$$\psi_{\mathcal{B}_V} : \begin{cases} V & \longrightarrow \mathbb{K}^m \\ \sum_{j=1}^m x_j v_j & \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \end{cases}$$

Damit lässt sich der Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen übersichtlich darstellen:

- lineare Abbildung: Sei $f : V \longrightarrow W$ linear.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \psi_{\mathcal{B}_V} \downarrow & & \downarrow \psi_{\mathcal{B}_W} \\ \mathbb{K}^m & \xrightarrow{x \mapsto \Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f) \cdot x} & \mathbb{K}^n \end{array} \quad \psi_{\mathcal{B}_W}(f(v)) = \Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f) \cdot \psi_{\mathcal{B}_V}(v), \quad v \in V$$

- Komposition linearer Abbildungen: Seien $f : U \longrightarrow V$ und $g : V \longrightarrow W$ linear.

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\ \psi_{\mathcal{B}_U} \downarrow & & \downarrow \psi_{\mathcal{B}_V} & & \downarrow \psi_{\mathcal{B}_W} \\ \mathbb{K}^l & \xrightarrow{x \mapsto \Phi_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_V}(f) \cdot x} & \mathbb{K}^m & \xrightarrow{x \mapsto \Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(g) \cdot x} & \mathbb{K}^n \end{array} \quad \Phi_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_W}(g \circ f) = \Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(g) \cdot \Phi_{\mathcal{B}_U \mathcal{B}_V}(f)$$

- Basiswechsel: Sei $f : V \longrightarrow W$ linear.

$$\begin{array}{ccccccc} V & \xrightarrow{\text{id}_V} & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{\text{id}_W} & W \\ \psi_{\mathcal{B}'_V} \downarrow & & \downarrow \psi_{\mathcal{B}_V} & & \downarrow \psi_{\mathcal{B}_W} & & \downarrow \psi_{\mathcal{B}'_W} \\ \mathbb{K}^m & \xrightarrow{x \mapsto \Phi_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V}(\text{id}_V) \cdot x} & \mathbb{K}^m & \xrightarrow{x \mapsto \Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f) \cdot x} & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{x \mapsto \Phi_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}'_W}(\text{id}_W) \cdot x} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

$$\Phi_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}'_W}(f) = \Phi_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}'_W}(\text{id}_W \circ f \circ \text{id}_V) = \Phi_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}'_W}(\text{id}_W) \cdot \Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f) \cdot \Phi_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V}(\text{id}_V) = T_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}'_W} \cdot \Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f) \cdot T_{\mathcal{B}'_V \mathcal{B}_V}$$

Algorithmen

BESTIMMUNG DER MATRIX EINER LINEAREN ABBILDUNG:

gegeben: $\mathbb{K}$ -Vektorräume V und W mit Basen $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ bzw. $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_n\}$ und $f : V \rightarrow W$ linear.

gesucht: Matrix $\Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f)$ von f bzgl. $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$.

Schreibe $\Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f) = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$. Für alle $j = 1, \dots, m$ berechne die j -te Spalte von $\Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f)$ wie folgt:

1) berechne $f(v_j)$,

2) stelle $f(v_j)$ in $\mathcal{B}_W$ dar: $f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i$

→ Die so ermittelten Körperelemente $a_{1j}, \dots, a_{nj}$ bilden die j -te Spalte von $\Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f)$.

BESTIMMUNG DER MATRIX EINES BASISWECHSELS:

gegeben: $\mathbb{K}$ -Vektorraum V mit Basen $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ und $\mathcal{B}'_V = \{v'_1, \dots, v'_m\}$.

gesucht: Matrix $T_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}'_V}$ des Basiswechsels von $\mathcal{B}_V$ nach $\mathcal{B}'_V$.

Schreibe $T_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}'_V} = \Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}'_V}(\text{id}_V) = (a_{ij})_{i,j=1, \dots, m}$. Für alle $j = 1, \dots, m$ berechne die j -te Spalte von $T_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}'_V}$ wie folgt:

Stelle v_j in $\mathcal{B}'_V$ dar: $v_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} v'_i$

→ Die so ermittelten Körperelemente $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ bilden die j -te Spalte von $T_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}'_V}$.

AUSWERTUNG EINER LINEAREN ABBILDUNG MITTELS EINER ZUGEHÖRIGEN MATRIX:

gegeben: $\mathbb{K}$ -Vektorräume V und W mit Basen $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ bzw. $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_n\}$, $\Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f)$ zu einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ und $v \in V$.

gesucht: $f(v)$.

Schreibe $\Phi_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_W}(f) = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$.

1) stelle v in $\mathcal{B}_V$ dar: $v = \sum_{j=1}^m x_j v_j$,

2) schreibe die so ermittelten Körperelemente $x_1, \dots, x_m$ in eine Spalte $x \in \mathbb{K}^m$,

3) berechne das Matrix-Vektor-Produkt

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj} x_j \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

4) berechne $f(v)$ als Linearkombination der Vektoren in $\mathcal{B}_W$ mit den in 3) ermittelten Körperelementen $y_1, \dots, y_n$ als Koeffizienten: $f(v) = \sum_{i=1}^n y_i w_i$.