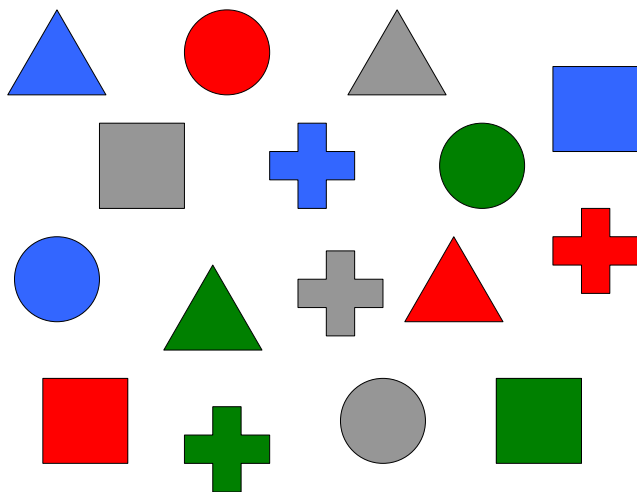


Zusammenfassung zum Thema „Quotientenräume“

Äquivalenzrelationen

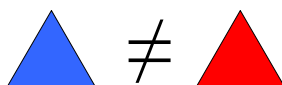
Wir betrachten irgendeine Menge X von Objekten mit verschiedenen Eigenschaften, z. B. diese:



Jedes dieser Objekte hat eine Form und eine Farbe und ist dadurch bereits eindeutig bestimmt. Wenn wir also sagen:

„Zwei Objekte a und b sind *gleich*, in Zeichen $a = b$, genau dann, wenn sie die gleiche Form und die gleiche Farbe haben.“

dann haben wir damit die Gleichheit „ $=$ “ auf X beschrieben. Nehmen wir aber mal an, wir interessieren uns nur für die Form der Objekte und nicht für ihre Farbe. Dann ist uns die Struktur von X zusammen mit „ $=$ “ zu kompliziert, denn es ist zwar



aber wir interessieren uns nicht für den Unterschied, da die beiden Objekte in ihrer Form übereinstimmen. Um uns also die Betrachtung zu vereinfachen, suchen wir eine Möglichkeit, „nicht so genau hinzusehen“ (hier: die Farbe zu ignorieren) und damit gewisse formal verschiedene Objekte als „gleich“ anzusehen. Die Lösung: Wir ersetzen die Gleichheit „ $=$ “ durch eine *Äquivalenz* (Gleichwertigkeit) „ $\sim$ “, die wir wie folgt definieren:

„Zwei Objekte a und b sind *äquivalent*, in Zeichen $a \sim b$, wenn sie die gleiche Form haben.“

Damit gilt dann



Um unser Konzept einer solchen Äquivalenzrelation zu formalisieren, müssen wir gewisse Eigenschaften fordern, die aber bei dem, was wir uns anschaulich vorstellen, klar erfüllt sind:

Definition: Eine Relation $\sim$ auf einer Menge X heißt *Äquivalenzrelation*, falls gilt:

- REFLEXIVITÄT: $a \sim a$ für alle $a \in X$ (denn wir wollen ja gerade unschärfer hinsehen als bei der Gleichheit, d. h. Elemente, die sowieso gleich sind, wollen wir auch als äquivalent ansehen)
- SYMMETRIE: $a \sim b \implies b \sim a$ für alle $a, b \in X$ (denn die Frage, ob zwei Elemente äquivalent sind, soll natürlich nicht von der Reihenfolge abhängen, in der sie genannt werden)
- TRANSITIVITÄT: $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$ für alle $a, b, c \in X$ (denn wenn $a \sim b$ gilt, wollen wir keinen Unterschied zwischen a und b erkennen, so dass wir auch die Aussagen $b \sim c$ und $a \sim c$ für alle $c \in X$ nicht mehr unterscheiden wollen)

Beispiele für Äquivalenzrelationen:

- auf jeder Menge X gibt es zwei triviale Äquivalenzrelationen:
 - die Gleichheit, d. h. $a \sim b :\Leftrightarrow a = b$, als „feinste“ Unterscheidung der Elemente und
 - die Relation $a \sim b$ für alle $a, b \in X$ als „gröbste“ Unterscheidung der Elemente.
- die Gleichheit der Form im obigen Beispiel.
- alternativ: die Gleichheit der Farbe im obigen Beispiel.
- Äquivalenzrelationen auf $X = \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}n \sim m & :\Leftrightarrow n - m \text{ teilbar durch } 2 \text{ (oder jedes andere } k \in \mathbb{N}) \\n \sim m & :\Leftrightarrow (n > 0 \wedge m > 0) \vee (n = m = 0) \vee (n < 0 \wedge m < 0) \text{ („gleiches Vorzeichen“)} \\n \sim m & :\Leftrightarrow |n| = |m| \text{ (gewissermaßen komplementär zur vorigen Relation)}\end{aligned}$$

- Äquivalenzrelationen auf $X = \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1)^T \sim (x_2, y_2)^T & :\Leftrightarrow x_1 = x_2 \\(x_1, y_1)^T \sim (x_2, y_2)^T & :\Leftrightarrow x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \\x \sim y & :\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ liegen im gleichen Quadranten}\end{aligned}$$

- Äquivalenzrelationen auf $X = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$:

$$\begin{aligned}f \sim g & :\Leftrightarrow f(0) = g(0) \\f \sim g & :\Leftrightarrow f(t) + f(-t) = g(t) + g(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \\f \sim g & :\Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 g(t) dt \\f \sim g & :\Leftrightarrow (f \text{ differenzierbar} \Leftrightarrow g \text{ differenzierbar})\end{aligned}$$

- Äquivalenzrelation auf $X = \{\|\cdot\| : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ Norm}\}$, wobei $\mathcal{C}[0, 1] := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$:

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \exists a, b > 0 \forall f \in \mathcal{C}[0, 1] : a\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq b\|f\|_1$$

- Äquivalenzrelation auf $X = M(n, n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$A \sim B \quad :\Leftrightarrow \quad \exists S \in \text{GL}(n; K) : S^{-1}AS = B$$

- und viele andere mehr ...

Quotienten

Zurück zum obigen Beispiel: Wir nennen zwei Objekte äquivalent, wenn sie die gleiche Form haben. Aber wie kann uns das die Betrachtung der Menge vereinfachen? Das Problem ist, dass alle anderen Begriffe, die wir kennen, wie etwa die Anzahl der Elemente einer Menge oder die Injektivität bzw. Surjektivität von Abbildungen, unsere Äquivalenzrelation nicht berücksichtigen: Formal besteht X aus 16 Elementen, aber wir wollen eigentlich sagen: „ X besteht aus 4 Elementen, nämlich einem Dreieck, einem Quadrat, einem Kreis und einem Kreuz.“, da wir ja den Farbunterschied ignorieren wollen. Oder man betrachte die Abbildung $f : X \rightarrow \{\text{Dreieck, Quadrat, Kreis, Kreuz}\}$, die jedem Objekt seine Form zuordnet. Diese ist nicht injektiv, denn aus $f(a) = f(b)$ folgt zunächst nur, dass a und b die gleiche Form haben. Damit sind sie für uns zwar bereits „gleich“, aber formal können sie sich noch in ihrer Farbe unterscheiden.

Man könnte auf die Idee kommen, das Problem zu lösen, indem man alle Definitionen anpasst und dann z. B. sagt: „Die Anzahl der Elemente von X bzgl. ‘ $\sim$ ’ ist 4.“ oder „ f ist injektiv bzgl. ‘ $\sim$ ’“. Dann müsste man aber die vereinfachte Betrachtung von X mit stark verkomplizierten Definitionen vieler Begriffe bezahlen.

(Achtung: Abstraktion!)

Sehr viel eleganter bekommt man das Problem in den Griff, wenn man sich klarmacht, dass wir in dem Moment, als wir die Äquivalenzrelation „ $\sim$ “ auf X eingeführt haben, ohne es zu merken die Menge X in unserem Denken durch eine gewisse andere Menge Q ersetzt haben. Diese neue Menge sieht so aus, dass zu jedem Element $a \in X$ ein Element $\tilde{a} \in Q$ gehört, wobei aber für je zwei äquivalente Elemente $a \sim b$ die zugehörigen Elemente in Q wirklich gleich sind, also $\tilde{a} = \tilde{b}$. Beim Zählen der Elemente von X bzgl. „ $\sim$ “ haben wir dann in Wirklichkeit die Elemente von Q gezählt und bei der Untersuchung der Injektivität von f bzgl. „ $\sim$ “ haben wir tatsächlich eine andere Abbildung $\tilde{f} : Q \rightarrow \{\text{Dreieck, Quadrat, Kreis, Kreuz}\}$ betrachtet.

Um das ganze zu formalisieren, suchen wir ein geeignetes Modell für Q sowie für die Zuordnung $p : X \rightarrow Q$, $a \mapsto p(a) := \tilde{a}$, so dass $p(a) = p(b) \iff a \sim b$ gilt. Es kommen einem spontan einige Möglichkeiten in den Sinn, die auch alle funktionieren:

- (i) $Q := \left\{ \text{rotes Quadrat}, \text{blaues Dreieck}, \text{grüner Kreis}, \text{rotes Kreuz} \right\}$ (beliebige „Repräsentanten“)
- (ii) $Q := \left\{ \text{blaues Dreieck}, \text{blaues Quadrat}, \text{blauer Kreis}, \text{blaues Kreuz} \right\}$ („Repräsentanten“ mit einer festen Farbe)
- (iii) $Q := \left\{ \text{Dreieck}, \text{Quadrat}, \text{Kreis}, \text{Kreuz} \right\}$ (Formen)

Im ersten Fall würde die Abbildung p dann jedem Quadrat das rote Quadrat, jedem Dreieck das blaue Dreieck, jedem Kreis den grünen Kreis und jedem Kreuz das rote Kreuz zuordnen. Im zweiten Fall würde p jedem Objekt a dasjenige blaue Objekt zuordnen, das die gleiche Form hat wie a . Im dritten Fall könnte man $p := f$ wählen. Wir erkennen: Jede beliebige Menge mit 4 Elementen eignet sich als Q . Jedoch erscheinen die hier gewählten Möglichkeiten noch etwas willkürlich.

Wir interessieren uns daher für eine allgemein sinnvolle, kanonische Wahl von Q . Man erkennt: Um ein Modell für Q anzugeben, muss man sich zunächst einen Überblick darüber verschaffen, welche Elemente von X zueinander äquivalent sind und welche nicht. Hierzu ist es hilfreich, zu einem vorgegebenen $a \in X$ alle zu a äquivalenten Elemente von X aufzusammeln und in einer Menge zusammenzufassen. Diese nennt man dann die *Äquivalenzklasse* von a und schreibt

$$[a] := \{b \in X \mid b \sim a\}$$

Man zeigt leicht mit den Eigenschaften von „ $\sim$ “, dass zwei Elemente $a, b \in X$ genau dann äquivalent sind, wenn ihre Äquivalenzklassen übereinstimmen, d. h. $a \sim b \iff [a] = [b]$. Damit haben wir aber bereits ein geeignetes Modell für die Menge Q und die Abbildung p gefunden: Wir nehmen als Q einfach die Menge aller Äquivalenzklassen von Elementen aus X und ordnen mit p jedem Element seine Äquivalenzklasse zu. Diese Art, Q zu wählen, ist zwar nicht immer die nächstliegende, aber im Gegensatz zu obigen Möglichkeiten (i) bis (iii) kann man sie relativ leicht allgemein formulieren und man hat (wenn man lange genug darüber nachdenkt) das Gefühl, dass diese Wahl in gewisser Weise „kanonisch“ ist. Also:

$$Q := X/\sim := \{[a] \mid a \in X\}, \quad p := \pi : X \rightarrow X/\sim, \quad \pi(a) := [a]$$

Dann heißt $X/\sim$ die *Quotientenmenge* (der *Quotient*) von X bzgl. „ $\sim$ “ und π die *kanonische Projektion* von X auf $X/\sim$.

Wir haben also jetzt folgendes erreicht: Gewisse Elemente $a, b \in X$, die zuvor in X äquivalent waren, d. h. $a \sim b$, sind in der Menge $X/\sim$, wo wir sie als $[a]$ bzw. $[b]$ wiederfinden, plötzlich gleich, also $[a] = [b]$. Für das Beispiel bedeutet das: Wir können in sämtlichen Betrachtungen, bei denen nur die Form und nicht die Farbe der Objekte interessiert, einfach den Quotienten statt die Menge selbst betrachten und so z. B. eine injektive Abbildung bekommen, indem wir nicht jedem Objekt seine Form zuordnen, sondern jeder Äquivalenzklasse (d. h. in diesem Fall jeder Menge von Objekten der gleichen Form) die Form der darin befindlichen Objekte zuordnen.

Anwendung auf Vektorräume

Sei V ein K -Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Wir betrachten folgende Relation auf V :

$$\forall a, b \in V : \quad a \sim b \quad :\iff \quad a - b \in U$$

Hierfür schreibt man auch $a \equiv b \pmod{U}$ („ a ist kongruent zu b modulo U .“). Man zeigt leicht, dass es sich hierbei um eine Äquivalenzrelation handelt. Die Äquivalenzklassen, die bei dieser speziellen Äquivalenzrelation auftreten, kann man auch noch anders beschreiben. Definiert man nämlich

$$a + U := \{a + u \in V \mid u \in U\} \quad \text{für } a \in V$$

so ist $[a] = a + U$ für alle $a \in V$.

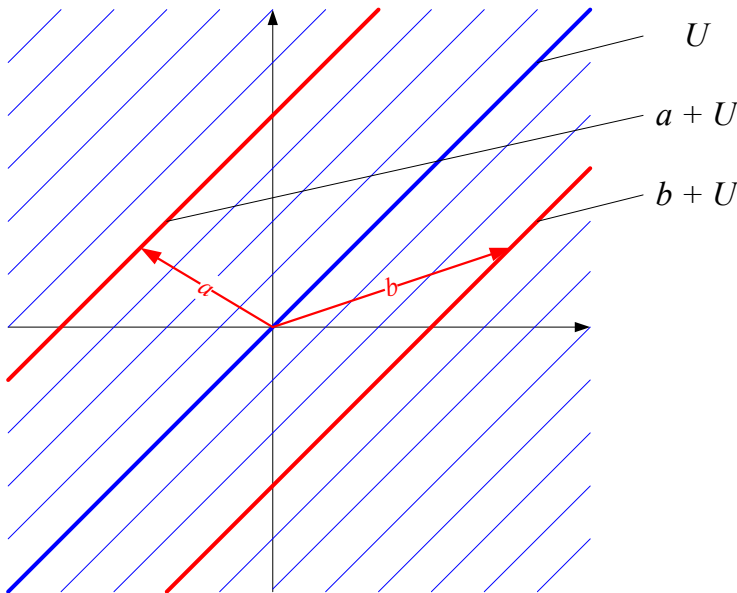
Beweis:

$$\text{„}\subset\text{“: } b \in [a] \implies b \sim a \implies b - a \in U \implies b = a + (b - a) \in a + U$$

$$\text{„}\supset\text{“: } b \in a + U \implies \exists u \in U : b = a + u \implies \exists u \in U : b - a = u \implies b - a \in U \implies b \sim a \implies b \in [a]$$

□

Die Äquivalenzklasse eines Vektors $a \in V$ ist also der Untervektorraum U verschoben um den Vektor a . Schematisch dargestellt (etwa für $V = \mathbb{R}^2$, $U = \mathbb{R}(1, 1)^T$):



Natürlich kann man auch hier die Quotientenmenge $V/\sim$, wofür man in diesem Fall auch V/U schreibt, betrachten:

$$V/U := V/\sim := \{[a] \mid a \in V\} = \{a + U \mid a \in V\}$$

In der Zeichnung sind das die zu U parallelen Geraden (einschließlich U selbst), von denen einige schematisch eingezeichnet sind. Dadurch, dass wir hier nicht irgendeine Äquivalenzrelation auf irgendeiner Menge betrachten, sondern eine durch einen Untervektorraum induzierte Äquivalenzrelation auf einem Vektorraum, wird die Menge V/U zusammen mit geeignet gewählten Verknüpfungen selbst wieder zu einem Vektorraum. Wir müssen definieren, was die Summe zweier Äquivalenzklassen (also zweier Geraden im obigen Bild) und ein skalares Vielfaches einer Äquivalenzklasse sein soll. Das macht man (in beiden Notationen aufgeschrieben) wie folgt:

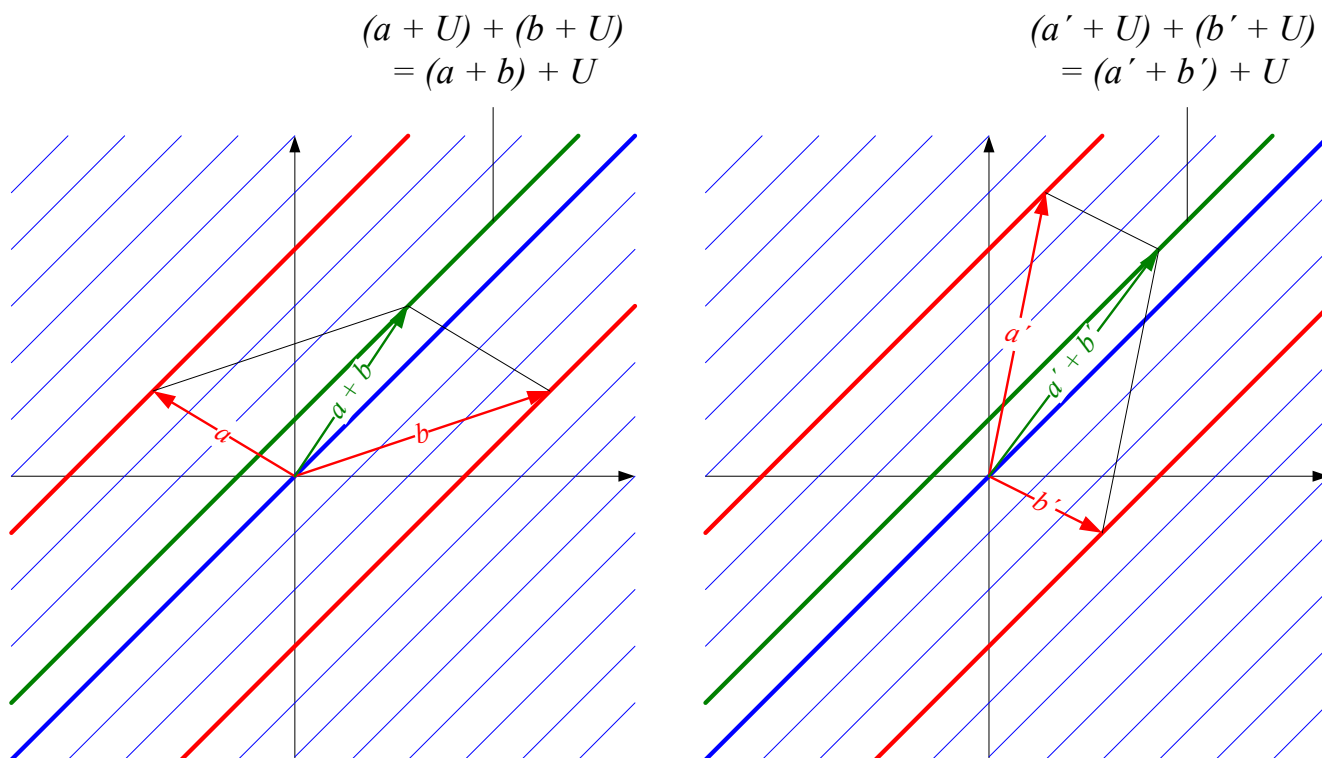
$$\begin{aligned} + : V/U \times V/U &\rightarrow V/U, & [a] + [b] &:= [a + b] \quad \text{bzw.} \quad (a + U) + (b + U) := (a + b) + U \\ \text{und} \quad \cdot : K \times V/U &\rightarrow V/U, & \alpha[a] &:= [\alpha a] \quad \text{bzw.} \quad \alpha(a + U) := (\alpha a) + U, \quad a, b \in V, \alpha \in K \end{aligned}$$

Das sieht auf den ersten Blick aus wie die Definition zweier Abbildungen „+“ und „·“. Tatsächlich ist es das auch, aber dies ist nicht unmittelbar klar. Betrachten wir wieder obiges Bild: Um die Geraden $a + U$ und $b + U$ zu addieren, also $(a + U) + (b + U)$ zu bestimmen, verknüpfen wir einfach die Repräsentanten a und b über die Addition in V und gehen dann wieder zur zugehörigen Gerade über, also zu $(a + b) + U$. Wir hätten aber doch auch andere Repräsentanten der Geraden zur Bestimmung der Summe verwenden können, denn wenn man z. B. irgendein $a' \in a + U = [a]$ betrachtet, dann ist $a' \sim a$, also, wie wir oben gesehen haben, $[a] = [a']$ oder eben $a + U = a' + U$. Genauso kann man ein anderes $b' \in b + U$ betrachten und bekommt $b + U = b' + U$. Wir haben also oben für die Summe von $a + U$ und $b + U$ mindestens zwei Definitionen angegeben, nämlich einerseits $(a + b) + U$ und andererseits, da ja $a + U = a' + U$ und $b + U = b' + U$ gilt, auch $(a' + b') + U$. Glücklicherweise ist das aber dasselbe, wie man formal so sieht:

$$\begin{aligned} a + U = a' + U &\implies a \sim a' && (\text{„Äquivalenzklassen gleich} \implies \text{Repräsentanten äquivalent“}) \\ b + U = b' + U &\implies b \sim b' && (\text{ebenso}) \\ \implies a - a' \in U, \quad b - b' \in U &&& (\text{nach Definition von „}\sim\text{“}) \\ \implies (a - a') + (b - b') \in U &&& (\text{da } U \text{ Untervektorraum}) \\ \implies (a + b) - (a' + b') \in U &&& (\text{da } (a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b')) \\ \implies a + b \sim a' + b' &&& (\text{nach Definition von „}\sim\text{“}) \\ \implies (a + b) + U = (a' + b') + U &&& (\text{„Repräsentanten äquivalent} \implies \text{Äquivalenzklassen gleich“}) \end{aligned}$$

D. h. unabhängig davon, welche Repräsentanten wir für $a + U$ und $b + U$ verwenden, ist die Definition von $(a + U) + (b + U)$ immer dieselbe. Damit haben wir gesehen, dass wir mit unserem „+“ auf V/U wirklich eine Abbildung definiert haben. Als Bild sieht das so aus:

→



Völlig analog sieht man, dass auch unsere Definition der skalaren Multiplikation unabhängig von der Repräsentantenwahl ist. Solche Betrachtungen muss man immer dann durchführen, wenn man eine Abbildung auf einer Quotientenmenge definiert und dabei zur Angabe des Funktionswerts, der einer Äquivalenzklasse zugeordnet werden soll, einen Repräsentanten verwendet. Das Problem ist, dass der Übergang von einer Äquivalenzklasse zu einem Repräsentanten keine Abbildung ist, da sich i. a. mehrere Elemente in einer Äquivalenzklasse befinden. Man muss sich also klarmachen, dass die Abbildung, die man gerade definiert hat, gleichen Äquivalenzklassen auch den gleichen Funktionswert zuordnet, so dass die konkrete Wahl des Repräsentanten keine Rolle spielt.

Wie man zeigen kann, ist $(V/U, +, \cdot)$ mit den oben definierten Verknüpfungen tatsächlich ein K -Vektorraum. Der Nullvektor $0_{V/U}$ ist dabei gerade die Äquivalenzklasse von 0_V , also $0_{V/U} = [0_V] = 0_V + U = U$, denn für alle $a \in V$ gilt:

$$[0_V] + [a] = [0_V + a] = [a] \quad \text{bzw.} \quad (0_V + U) + (a + U) = (0_V + a) + U = a + U$$

d. h. U ist das neutrale Element in der abelschen Gruppe $(V/U, +)$.

Die Vektorraumstruktur auf V/U ist gerade so gewählt, dass die kanonische Projektion $\pi : V \rightarrow V/U$ linear ist.

Beispiele

Die folgenden Aufgaben zeigen u. a. Beweise von Wohldefiniertheit bei allgemeinen Quotientenmengen (Aufgabe 1) und bei Quotientenräumen (Aufgaben 2 und 3). Aufgabe 3 ist sehr analog zu Aufgabe 2, Teile b) und c), von Blatt 4.

Aufgabe 1

Auf der Menge $M(n, n)$ aller (n, n) -Matrizen über einem Körper K sei die Äquivalenzrelation „ $\sim$ “ definiert durch

$$A \sim B \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists S \in \text{GL}(n; K) : S^{-1}AS = B$$

Zeige, dass durch

$$f([A]) := \det A$$

eine Abbildung $f : M(n, n)/\sim \rightarrow K$ wohldefiniert ist.

Lösung

Ist $[A] = [B] \in M(n, n)/\sim$, so ist $A \sim B$, d. h. es existiert ein $S \in \text{GL}(n; K)$ mit $S^{-1}AS = B$. Folglich gilt:

$$f([B]) = \det B = \det (S^{-1}AS) = \det (S^{-1}) \cdot \det A \cdot \det S = (\det S)^{-1} \cdot \det A \cdot \det S = \det A = f([A])$$

so dass f wohldefiniert ist.

Bemerkung:

Wir haben gezeigt, dass bzgl. „ $\sim$ “ äquivalente Matrizen die gleiche Determinante haben. Wir können also einer Äquivalenzklasse einfach die Determinante einer beliebigen darin enthaltenen Matrix zuordnen, ohne die Abbildungseigenschaft $[A] = [B] \implies f([A]) = f([B])$ zu verlieren, da alle Matrizen einer Äquivalenzklasse sowieso die gleiche Determinante haben.

Aufgabe 2

Sei V ein K -Vektorraum und $U, W \subset V$ Untervektorräume mit $V = U \oplus W$. Gib einen Isomorphismus $f : V/U \rightarrow W$ an.

Lösung

Wähle

$$f : V/U \rightarrow W, \quad f(a + U) := w, \quad \text{wobei } a = u + w, \quad u \in U, \quad w \in W$$

- Wohldefiniertheit: Hier sind mehrere Dinge zu beachten:

- Wegen $V = U \oplus W$ lässt sich jedes $a \in V$ **eindeutig** darstellen als $a = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$, d. h. der Übergang von a zu w bereitet keine Probleme.
- Zu klären bleibt die Unabhängigkeit von der Repräsentantenwahl: Ist $a + U = b + U$ für $a, b \in V$, so ist $a - b \in U$. Wir schreiben $a = u + w$ und $b = u' + w'$ für $u, u' \in U$ und $w, w' \in W$ und sehen:

$$\underbrace{(a - b)}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in W} = a - b = (u + w) - (u' + w') = \underbrace{(u - u')}_{\in U} + \underbrace{(w - w')}_{\in W}$$

Wegen $V = U \oplus W$ ist die Darstellung eindeutig, so dass $w - w' = 0 \implies w = w'$ folgt. Also gilt auch

$$f(a + U) \stackrel{\text{Def. } f}{=} w = w' \stackrel{\text{Def. } f}{=} f(b + U)$$

- Linearität: Für $a + U, b + U \in V/U$ und $\alpha, \beta \in K$ schreiben wir wieder $a = u + w$ und $b = u' + w'$ mit $u, u' \in U$ und $w, w' \in W$ und sehen:

$$\begin{aligned} & f(\alpha(a + U) + \beta(b + U)) \stackrel{\text{Def. „+“, „\cdot“}}{=} f((\alpha a + \beta b) + U) \\ & \stackrel{\text{Darst. v. } a, b}{=} f\left(\underbrace{(\alpha u + \beta u')}_{\in U} + \underbrace{(\alpha w + \beta w')}_{\in W} + U\right) \stackrel{\text{Def. } f}{=} \alpha w + \beta w' \stackrel{\text{Def. } f}{=} \alpha f(a + U) + \beta f(b + U) \end{aligned}$$

- Bijektivität: Dazu geben wir einfach die Umkehrabbildung an: Sei

$$g : W \rightarrow V/U, \quad g(w) := w + U \quad \text{oder kurz: } g := \pi|_W$$

Für $a = u + w \in V$ mit $u \in U$ und $w \in W$ gilt:

$$f(g(w)) = f(w + U) = f\left(\underbrace{0}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W} + U\right) = w,$$

$$g(f(a + U)) = g(w) = w + U = a + U \quad \text{wegen } a - w = u \in U \implies a \sim w$$

so dass g tatsächlich die Umkehrabbildung von f und f damit bijektiv, also ein Isomorphismus, ist.

Aufgabe 3

Sei V ein K -Vektorraum mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Eine *Halbnorm* auf V ist eine Abbildung $p : V \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y \in V, \alpha \in K$ gilt:

1. $p(x) \geq 0$
2. $p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x)$
3. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (Dreiecksungleichung)

Der Unterschied zu einer Norm besteht darin, dass Vektoren $x \in V$ existieren können mit $x \neq 0_V$, aber $p(x) = 0$.

a) Zeige: $N := \{x \in V \mid p(x) = 0\}$ ist ein Untervektorraum.

b) Definiere auf dem Quotientenraum V/N mit Hilfe von p eine Norm.

Lösung

a)

- $N \stackrel{!}{\neq} \emptyset$: $p(0_V) = p(0_K \cdot 0_V) \stackrel{2.}{=} |0_K| \cdot p(0_V) = 0 \cdot p(0_V) = 0 \implies 0_V \in N \implies N \neq \emptyset$
- $a, b \in N \stackrel{!}{\implies} a + b \in N$: $0 \stackrel{1.}{\leq} p(a + b) \stackrel{3.}{\leq} p(a) + p(b) \stackrel{a, b \in N}{=} 0 + 0 = 0 \implies p(a + b) = 0 \implies a + b \in N$
- $a \in N, \alpha \in K \stackrel{!}{\implies} \alpha a \in N$: $p(\alpha a) \stackrel{2.}{=} |\alpha| \cdot p(a) \stackrel{a \in N}{=} |\alpha| \cdot 0 = 0 \implies \alpha a \in N$

b) Setze

$$\|\cdot\| : V/N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|x + N\| := p(x)$$

- Wohldefiniertheit: Ist $x + N = y + N$ für $x, y \in V$, so ist $x - y \in N$ und damit auch $y - x \in N$. Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \|x + N\| \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} p(x) = p(y + (x - y)) \stackrel{3.}{\leq} p(y) + p(x - y) \stackrel{x - y \in N}{=} p(y) + 0 = p(y) \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} \|y + N\| \\ \text{(ii)} \quad & \|y + N\| \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} p(y) = p(x + (y - x)) \stackrel{3.}{\leq} p(x) + p(y - x) \stackrel{y - x \in N}{=} p(x) + 0 = p(x) \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} \|x + N\| \end{aligned}$$

also $\|x + N\| = \|y + N\|$, so dass $\|\cdot\|$ wohldefiniert ist.

- $\forall x + N \in V/N, x + N \neq 0_{V/N} : \|x + N\| \stackrel{!}{>} 0$:

Zunächst gilt für alle $x \in V$: $\|x + N\| \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} p(x) \stackrel{1.}{\geq} 0$. Außerdem gilt:

$$\|x + N\| = 0 \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{\implies} p(x) = 0 \stackrel{\text{Def. } N}{\implies} x \in N \implies x + N = N = 0_{V/N}$$

so dass umgekehrt für $x + N \neq 0_{V/N}$ bereits $\|x + N\| > 0$ ist.

- $\forall x + N \in V/N, \alpha \in K : \|\alpha(x + N)\| \stackrel{!}{=} |\alpha| \cdot \|x + N\|$:

$$\|\alpha(x + N)\| \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} \|(\alpha x) + N\| \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} p(\alpha x) \stackrel{2.}{=} |\alpha| \cdot p(x) \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} |\alpha| \cdot \|x + N\|$$

- $\forall x + N, y + N \in V/N : \|(x + N) + (y + N)\| \stackrel{!}{\leq} \|x + N\| + \|y + N\|$:

$$\|(x + N) + (y + N)\| \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} \|(x + y) + N\| \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} p(x + y) \stackrel{3.}{\leq} p(x) + p(y) \stackrel{\text{Def. } \|\cdot\|}{=} \|x + N\| + \|y + N\|$$