Matthias Stemmler
stemmler@mathematik.uni-marburg.de

SS 2007

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Sei

$$d : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \ln\big(1 + |x-y|\big) \end{cases}$$

Zeige:

a) d ist eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

b) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist vollständig.

Aufgabe 2

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zu $M \subset X$ bezeichne M° den offenen Kern und $\overline{M}$ die abgeschlossene Hülle von M in (X,d). Beweise oder widerlege:

a) (i) $\big\{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\big\}^\circ \subset \big\{x \in X : f(x) < \alpha\big\}$
   (ii) $\big\{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\big\}^\circ \supset \big\{x \in X : f(x) < \alpha\big\}$

b) (i) $\overline{\big\{x \in X : f(x) < \alpha\big\}} \subset \big\{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\big\}$
   (ii) $\overline{\big\{x \in X : f(x) < \alpha\big\}} \supset \big\{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\big\}$

Aufgabe 3

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $C[0,1] := \big\{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig}\big\}$ mit der Norm $\|f\|_\infty := \sup\big\{|f(x)| : x \in [0,1]\big\}$. Zeige:

a) $A := \big\{f \in C[0,1] : f \text{ ist monoton wachsend}\big\}$ ist abgeschlossen.
   Hinweis: Betrachte konvergente Folgen in A.

b) $B := \big\{f \in C[0,1] : f \text{ hat keine Nullstelle}\big\}$ ist offen.
   Hinweis: Finde zu jedem $f \in B$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B_{\|\cdot\|_\infty}(f, \varepsilon) \subset B$.

c) Ist $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ stetig, so ist die Abbildung $G : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$, $f \longmapsto f \circ g$, wohldefiniert und stetig.

d) Ist $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so ist die Abbildung $H : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$, $f \longmapsto h \circ f$, wohldefiniert und stetig.

Aufgabe 4

a) Welche der folgenden Mengen sind kompakt in $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$?

   (i) $A_1 := \big\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \sin(x_1) = \cos(x_2)\big\}$
   (ii) $A_2 := \big\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : |x_2| \leqslant 1 - x_1^2\big\}$
   (iii) $A_3 := \big\{x e^{-\|x\|_2^2} \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\|_2 \geqslant 1\big\}$

b) Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

   (i) f ist *eigentlich*, d. h. Urbilder kompakter Mengen unter f sind kompakt.
   (ii) Jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$, für die $\big(f(x_k)\big)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt ist, hat eine konvergente Teilfolge.

c) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, X kompakt und $f : X \longrightarrow Y$ stetig und bijektiv. Zeige, dass auch $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ stetig ist.
   Hinweis: Eine Abbildung ist genau dann stetig, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

Aufgabe 5

Sei

$$f : [1, 16] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad t \longmapsto \frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t-1}$$

Gib eine Parametrisierung des Graphen von f als Kurve in $\mathbb{R}^2$ an und berechne die Bogenlänge.

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *homogen vom Grad* $k \in \mathbb{N}$, d. h. für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gelte $f(\alpha x) = \alpha^k f(x)$. Zeige, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(\partial_v f)(v) = k f(v)$$

Dabei bezeichne $(\partial_v f)(v)$ die Richtungsableitung von f in v in der Richtung v.

Aufgabe 7

Sei

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \sin(x_1) = x_2 + \sin(x_2) \right\}$$

Zeige: Es existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Kurve $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow A$ mit $\varphi(0) = (0,0)^T$. Berechne $\varphi'(0)$.

Aufgabe 8

Sei $n \geqslant 2$ und

$$M := \left\{ (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1,\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

Zeige: M ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-2$.

Aufgabe 9

Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 x_2$$

Bestimme die absoluten Extrema von f auf der Menge

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2 \right\}$$

Aufgabe 10

Löse die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y' = \ln(x) y + x^x, \quad y(1) = 1 \quad$ auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$

b) $y' = e^{e^x - y} + e^x, \quad y(1) = e \quad$ auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}$
   Hinweis: Substituiere $z = e^y$.

c) $y' = \cos(x) y^2 + \cos(x), \quad y(0) = 0 \quad$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Aufgabe 11

Bestimme alle reellen Lösungen der folgenden Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$y''' + y'' - y' - y = e^{2x}$$

Aufgabe 12

Sei $G \subset \mathbb{R}$, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$. Zeige: φ ist konstant oder injektiv.

Hinweis: Beachte den Satz von Rolle.