Matthias Stemmler
stemmler@mathematik.uni-marburg.de

SS 2007

Übungsaufgaben zur Analysis I und II

Aufgabe 1

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Zeige: Die Folge $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$m_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j, \qquad n \in \mathbb{N}$$

konvergiert ebenfalls gegen a.

Aufgabe 2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$(n-1)a_{n+1} \leqslant n a_n \leqslant (n+1)a_{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Aufgabe 3

Berechne das folgende unendliche Produkt:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f(x), f''(x) \geqslant 0$ und $f'(x) \leqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $f'(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Aufgabe 5

Berechne die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$

Aufgabe 6

Sei

$$f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(3^k x)}{2^k}$$

Zeige, dass $f(x)$ auf $[0,\pi]$ gleichmäßig konvergiert. Folgere, dass f integrierbar ist und berechne $\int_0^{\pi} f(x)\, dx$.

Aufgabe 7

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto \left| \int_x^y f(t)\, dt \right|$$

a) Zeige: Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, so ist $\int_x^y f(t)\, dt > 0$.

b) Verwende a), um zu zeigen, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

c) Gib Beispiele für bekannte Metriken an, die sich auf diese Weise erzeugen lassen.

Aufgabe 8

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $f:(X,d)\longrightarrow(\mathbb{R},|\cdot|)$ stetig und *im Unendlichen verschwindend*, d. h.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists K\subset X \text{ kompakt } \forall x\in X\setminus K: |f(x)|<\varepsilon$$

Zeige, dass f gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 9

Die Kurve γ sei gegeben durch

$$\gamma:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R}^2,\qquad t\longmapsto\left(\frac{1}{\cos(t)},\ln\left(\frac{\sin(t)+1}{\cos(t)}\right)\right)^T$$

Gib ein Intervall $I\subset\mathbb{R}$ und eine Parametertransformation $\varphi:I\longrightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ an, so dass $\gamma\circ\varphi:I\longrightarrow\mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 10

Zeige: Es existiert ein $0<\varepsilon\leqslant 1$ und eine C^1-Funktion $\varphi:(1-\varepsilon,1+\varepsilon)\longrightarrow(0,\infty)$ mit

$$x^{\varphi(x)}=\varphi(x)^x\qquad\text{für alle } x\in(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$$

Berechne $\varphi'(1)$.

Aufgabe 11

Sei $M\subset\mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $k\geqslant 1$. Sei $c\in\mathbb{R}^n$ und

$$\widetilde{M}:=M\cap(\mathbb{R}c)^\perp=\big\{a\in M:\langle a,c\rangle=0\big\}$$

Zeige: Ist $c\notin\bigcup_{a\in\widetilde{M}}N_aM$, so ist $\widetilde{M}$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $k-1$.

Aufgabe 12

Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y'=2x\cos^2(y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $y(0)=0$.

b) $y'''-2y''+y'=-4xe^{-x}$, $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $y(0)=4, y'(0)=2, y''(0)=4$.

Aufgabe 13

Sei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit $f(x)=e^x$ für $x\in[0,2\pi)$.

a) Bestimme die Fourier-Reihe von f.

b) Zeige: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}+\frac{1}{2}$.

Aufgabe 14

Zeige, dass für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt:

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=2^n\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Lösungsvorschläge

zu Aufgabe 1

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $a_n \longrightarrow a$ existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant M$. Für alle $n \geqslant M$ gilt:

$$|m_n - a| = \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j - a\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(a_j - a)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|a_j - a| = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{M-1}|a_j - a|}_{=:\, b_n} + \frac{1}{n}\sum_{j=M}^{n}|a_j - a|$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, da der erste Summenausdruck nicht von n abhängt. Also existiert ein $N \geqslant M$, so dass $b_n = |b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant N$. Der zweite Summenausdruck besteht aus $n - M + 1$ Summanden mit $j \geqslant M$. Also gilt für alle $n \geqslant N$ (und damit auch $n \geqslant M$):

$$|m_n - a| \leqslant \underbrace{b_n}_{<\varepsilon/2} + \frac{1}{n}\sum_{j=M}^{n}\underbrace{|a_j - a|}_{<\varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{n - M + 1}{n}}_{\leqslant 1} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, gilt $\lim_{n\to\infty} m_n = a$.

zu Aufgabe 2

Wegen $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der gegebenen Ungleichung:

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{a_n}{a_{n+1}} = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leqslant \frac{n+1}{n}$$

Da sowohl $\frac{n-1}{n}$ als auch $\frac{n+1}{n}$ gegen 1 konvergiert, geht auch $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ gegen 1. Nach VL ist also der gesuchte Konvergenzradius gleich 1.

zu Aufgabe 3

Mit $c_k := \frac{k+1}{k}$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k} \cdot \frac{k+1}{k+2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\frac{k+1}{k}}{\frac{k+2}{k+1}} = \prod_{k=1}^{n}\frac{c_k}{c_{k+1}} = \frac{c_1}{c_2}\cdot\frac{c_2}{c_3}\cdots\frac{c_{n-1}}{c_n}\cdot\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{c_1}{c_{n+1}}$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{c_1}{c_{n+1}} = c_1 \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}}_{=1} = c_1 = 2$$

Insbesondere ist dieser Grenzwert ungleich 0. Also ist das unendliche Produkt konvergent und es gilt:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)} = 2$$

zu Aufgabe 4

Für jedes $x > 0$ existiert nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf $f|_{[0,x]}$, ein $g(x) \in [0, x]$ mit

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(g(x))$$

Wegen $f''(x) \geqslant 0$ ist f' monoton wachsend, d. h. aus $g(x) \leqslant x$ folgt $f'(g(x)) \leqslant f'(x)$. Es folgt für alle $x > 0$:

$$\frac{-f(0)}{x} \leqslant \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(g(x)) \leqslant f'(x) \leqslant 0$$

Wegen $\frac{-f(0)}{x} \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow \infty$ geht dann auch $f'(x) \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow \infty$.

zu Aufgabe 5

a) partielle Integration:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin(x)}_{u'(x)}\underbrace{\sin(x)}_{v(x)}\,dx = \underbrace{\big[-\cos(x)\sin(x)\big]_{x=0}^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} (-\cos(x))\cos(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\sin^2(x))\,dx = 2\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx \quad\Longrightarrow\quad 2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = 2\pi \quad\Longrightarrow\quad \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi$$

b) Substitution $y = e^x$:

$$\int_a^b \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_a^b \frac{1}{1+(e^x)^2}\,e^x\,dx = \int_{e^a}^{e^b} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \big[\arctan(y)\big]_{y=e^a}^{e^b} = \arctan(e^b) - \arctan(e^a)$$

Damit gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$
$$= \arctan(1) - \lim_{a\to-\infty}\arctan(e^a) + \lim_{b\to\infty}\arctan(e^b) - \arctan(1) = -0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

zu Aufgabe 6

Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\forall x \in [0,\pi] : \left|\frac{\sin(3^k x)}{2^k}\right| = \frac{|\sin(3^k x)|}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^k} \quad\Longrightarrow\quad \left\| x \longmapsto \frac{\sin(3^k x)}{2^k}\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^k}$$

Wegen $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 < \infty$ ist nach dem Majorantenkriterium auch

$$\sum_{k=0}^\infty \left\| x \longmapsto \frac{\sin(3^k x)}{2^k}\right\|_\infty$$

konvergent. Nach VL ist also $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\sin(3^k x)}{2^k}$ gleichmäßig konvergent. Da $x \longmapsto \frac{\sin(3^k x)}{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ stetig ist, ist dann auch f stetig, insbesondere integrierbar und wir können gliedweise integrieren. Es gilt:

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \sum_{k=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\sin(3^k x)}{2^k}\,dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k}\int_0^\pi \sin(3^k x)\,dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k}\left[\frac{-\cos(3^k x)}{3^k}\right]_{k=0}^\pi$$

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist 3^k ungerade, so dass $\cos(3^k\pi) = -1$ gilt. Es folgt:

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2^k}\cdot\frac{2}{3^k} = 2\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{6}\right)^k = \frac{2}{1-\frac{1}{6}} = \frac{12}{5}$$

zu Aufgabe 7

a) Da f stetig und $[x,y]$ kompakt ist, nimmt f auf $[x,y]$ ein Minimum an, d. h. es existiert ein $t_0 \in [x,y]$ mit $f(t) \geqslant f(t_0)$ für alle $t \in [x,y]$. Daraus folgt:

$$\int_x^y f(t)\,dt \geqslant \int_x^y f(t_0)\,dt = \underbrace{f(t_0)}_{>0}\underbrace{(y-x)}_{>0} > 0$$

b)

- Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt ...
  - ... im Fall $x = y$:

$$d(x,y) = d(x,x) = \left|\int_x^x f(t)\,dt\right| = 0$$

  - ... im Fall $x < y$ nach a):

$$d(x,y) = \Bigg|\underbrace{\int_x^y f(t)\,dt}_{>0}\Bigg| = \int_x^y f(t)\,dt > 0$$

– ... im Fall $x > y$ nach a):

$$d(x,y) = \left| \int_x^y f(t)\ dt \right| = \left| -\underbrace{\int_y^x f(t)\ dt}_{>0} \right| = \int_y^x f(t)\ dt > 0$$

- Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$d(x,y) = \left| \int_x^y f(t)\ dt \right| = \left| - \int_y^x f(t)\ dt \right| = \left| \int_y^x f(t)\ dt \right| = d(y,x)$$

- Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$d(x,z) = \left| \int_x^z f(t)\ dt \right| = \left| \int_x^y f(t)\ dt + \int_y^z f(t)\ dt \right| \leqslant \left| \int_x^y f(t)\ dt \right| + \left| \int_y^z f(t)\ dt \right| = d(x,y) + d(y,z)$$

c) Einige Beispiele:

$f(t)$	$d(x,y)$
1	$\lvert x-y \rvert$
e^t	$\lvert e^x - e^y \rvert$
$\dfrac{1}{1+t^2}$	$\lvert \arctan(x) - \arctan(y) \rvert$

zu Aufgabe 8

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $K \subset X$ kompakt, so dass für alle $x \in X \setminus K$ gilt: $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Da f stetig ist, existiert zu jedem $x \in K$ ein $\delta(x) > 0$, so dass für alle $y \in X$ mit $d(x,y) < 2\delta(x)$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Die Kugeln $(B_d(x, \delta(x)))_{x \in K}$ bilden eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, d. h. es existieren $x_1, \ldots, x_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, mit $K \subset \bigcup_{j=1}^n B_d(x_j, \delta(x_j))$. Wähle $\delta := \min\{\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)\} > 0$. Seien $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$. Wir zeigen $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Fallunterscheidung:

- $x \in K$ oder $y \in K$: Sei o. B. d. A. $x \in K$. Dann ist $x \in B_d(x_j, \delta(x_j))$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$. Es folgt:

$$d(x_j, y) \leqslant d(x_j, x) + d(x,y) < \delta(x_j) + \delta \leqslant \delta(x_j) + \delta(x_j) = 2\delta(x_j) \quad \Longrightarrow \quad |f(x_j) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  und damit

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- $x, y \notin K$: Dann gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Da $x, y \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt waren, ist f gleichmäßig stetig.

Alternativ: Widerspruchsbeweis mit Folgenkompaktheit.

zu Aufgabe 9

γ ist stetig differenzierbar mit

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{1}{\cos^2(t)}\ (-\sin(t)), \frac{\cos(t)}{\sin(t)+1}\ \frac{\cos^2(t) - (\sin(t)+1)(-\sin(t))}{\cos^2(t)} \right)^T = \left(\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}, \frac{1}{\cos(t)} \right)^T$$

$$\Longrightarrow \quad \|\gamma'(t)\|_2 = \left(\left(\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} \right)^2 + \left(\frac{1}{\cos(t)} \right)^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{\sin^2(t)}{\cos^4(t)} + \frac{\cos^2(t)}{\cos^4(t)} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\cos^4(t)} \right)^{1/2} = \frac{1}{\cos^2(t)}$$

Als stetig differenzierbare Kurve ist γ rektifizierbar und für die Bogenlänge $L(s)$ von $\gamma|_{[0,s]}$, gilt:

$$L(s) = \int_0^s \|\gamma'(t)\|_2\ dt = \int_0^s \frac{1}{\cos^2(t)}\ dt = \big[\tan(t) \big]_{t=0}^s = \tan(s)$$

Wählt man also

$$I := \tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) = \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \varphi : I \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad t \longmapsto \arctan(t)$$

so ist $\gamma \circ \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert.

zu Aufgabe 10

Anwendung des SIF: Setze

$$F : (0,\infty) \times (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto x^y - y^x$$

Dann ist F eine C^1-Funktion mit

$$(\operatorname{grad} F)(x,y) = \big(yx^{y-1} - y^x \ln(y), x^y \ln(x) - xy^{x-1}\big) \qquad \text{für alle } (x,y) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$$

Es ist $(1,1) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ mit $F(1,1) = 1^1 - 1^1 = 0$ und

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = x^y \ln(x) - xy^{x-1}\big|_{x=y=1} = -1 \neq 0, \text{ also invertierbar}$$

Nach dem SIF existiert ein $0 < \varepsilon \leqslant 1$ und eine C^1-Funktion $\varphi : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \longrightarrow (0,\infty)$, so dass für alle $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ gilt:

$$0 = F(x, \varphi(x)) = x^{\varphi(x)} - \varphi(x)^x \quad \Longrightarrow \quad x^{\varphi(x)} = \varphi(x)^x$$

Insbesondere gilt $1 = 1^{\varphi(1)} = \varphi(1)^1 = \varphi(1)$. Damit erhält man:

$$\varphi'(1) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))\Bigg|_{x=1}$$

$$= -\Big(x^{\varphi(x)} \ln(x) - x\varphi(x)^{x-1}\Big)^{-1} \Big(\varphi(x)x^{\varphi(x)-1} - \varphi(x)^x \ln(\varphi(x))\Big)\Big|_{x=1} = -(-1)^{-1} \cdot 1 = 1$$

zu Aufgabe 11

Sei $a \in \widetilde{M}$ fest. Wegen $\widetilde{M} \subset M$ ist dann auch a in M. Da M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist, existiert eine Umgebung U von a in $\mathbb{R}^n$ und eine C^1-Funktion $F = (f_1, \ldots, f_{n-k}) : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ mit

$$M \cap U = \big\{x \in U : F(x) = 0\big\} \qquad \text{und} \qquad \forall x \in M \cap U : \operatorname{Rang} J_F(x) = n-k$$

Setze

$$g : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \langle x, c\rangle \qquad \text{und} \qquad \widetilde{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-(k-1)} = \mathbb{R}^{n-k+1}, \quad F = (f_1, \ldots, f_{n-k}, g)$$

Dann ist g und damit $\widetilde{F}$ eine C^1-Funktion und es gilt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{M} \cap U &= (M \cap U) \cap (\mathbb{R}c)^\perp \\
&= \big\{x \in U : F(x) = 0\big\} \cap \big\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, c\rangle = 0\big\} \\
&= \big\{x \in U : F(x) = 0,\ g(x) = 0\big\} \\
&= \big\{x \in U : \widetilde{F}(x) = 0\big\}
\end{aligned}$$

Sei $x \in \widetilde{M} \cap U$ beliebig. Es gilt:

$$J_{\widetilde{F}}(x) = \begin{pmatrix} (\operatorname{grad} f_1)(x) \\ \vdots \\ (\operatorname{grad} f_{n-k})(x) \\ \hline (\operatorname{grad} g)(x) \end{pmatrix}$$

Wegen $\operatorname{Rang} J_F(x) = n-k$ sind die $(n-k)$ Zeilen von $J_F(x)$, also $(\operatorname{grad} f_1)(x), \ldots, (\operatorname{grad} f_{n-k})(x)$, linear unabhängig. Außerdem gilt nach Voraussetzung:

$$(\operatorname{grad} g)(x) = c \notin N_x M = \operatorname{span}\big\{(\operatorname{grad} f_1)(x), \ldots, (\operatorname{grad} f_{n-k})(x)\big\}$$

Damit sind auch $(\operatorname{grad} f_1)(x), \ldots, (\operatorname{grad} f_{n-k})(x), (\operatorname{grad} g)(x)$, also die Zeilen von $J_{\widetilde{F}}(x)$, linear unabhängig. Es folgt

$$\operatorname{Rang} J_{\widetilde{F}}(x) = n-k+1 = n-(k-1)$$

Da $x \in \widetilde{M} \cap U$ und $a \in \widetilde{M}$ beliebig gewählt waren, ist $\widetilde{M}$ eine $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

zu Aufgabe 12

a) DGL mit getrennten Variablen: Das AWP lautet $y' = f(x)g(y)$, $y(x_0) = y_0$ mit $f : I := \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ und $g : J := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = \cos^2(y)$ sowie $x_0 = y_0 = 0$. Es ist $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Setze

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x 2t\,dt = x^2$$
$$G : J \longrightarrow \mathbb{R}, \quad G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,dt = \int_0^y \frac{1}{\cos^2(t)}\,dt = \tan(y)$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\varphi : I' \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = G^{-1}(F(x)) = \arctan(x^2)$$

Dabei muss $I' \subset I$ mit $F(I') \subset G(J)$ gewählt werden. Wegen $I = \mathbb{R}$ und $G(J) = \tan\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \mathbb{R}$ erhalten wir mit $I' := \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich.

b) lineare DGL mit konstanten Koeffizienten: Die DGL lautet $P(D)y = f(x)e^{\mu x}$ mit $P(T) = T^3 - 2T^2 + T \in \mathbb{C}[T]$, $f(x) = -4x$ und $\mu = -1$. Es gilt:

$$P(T) = T^3 - 2T^2 + T = T(T-1)^2 = (T-\lambda_1)(T-\lambda_2)^2 \qquad \text{mit } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$$

Wir erhalten ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung $P(D)y = 0$ durch

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = 1, \qquad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^x, \qquad \varphi_3(x) = xe^{\lambda_2 x} = xe^x$$

Da f ein Polynom vom Grad 1 ist, existiert wegen $P(\mu) = P(-1) = -4 \neq 0$ nach VL ein Polynom $g(x) = ax + b$ vom Grad 1, so dass $\psi_0(x) = g(x)e^{\mu x} = (ax+b)e^{-x}$ die inhomogene Gleichung löst. Wir bestimmen a und b:

$$\begin{aligned}
-4xe^{-x} &= \psi_0'''(x) - 2\psi_0''(x) + \psi_0'(x) \\
&= (-ax + 3a - b)e^{-x} - 2(ax - 2a + b)e^{-x} + (-ax + a - b)e^{-x} \\
&= (-4ax + 8a - 4b)e^{-x} \\
&= -4(ax - 2a + b)e^{-x}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad 1x + 0 = x = ax - 2a + b \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ -2a + b &=& 0 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b &=& 2 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \psi_0(x) = (x+2)e^{-x}$$

Jede Lösung der DGL ist also von der Form

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \mu_1\varphi_1(x) + \mu_2\varphi_2(x) + \mu_3\varphi_3(x) = (x+2)e^{-x} + \mu_1 + \mu_2 e^x + \mu_3 xe^x, \qquad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$$

Wir bestimmen μ_1, μ_2, μ_3 so, dass die Anfangswertbedingungen erfüllt sind. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= (-x-1)e^{-x} + \mu_2 e^x + \mu_3 e^x + \mu_3 xe^x \\
\psi''(x) &= xe^{-x} + \mu_2 e^x + 2\mu_3 e^x + \mu_3 xe^x
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi'(0) \\ \psi''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \mu_1 + \mu_2 \\ -1 + \mu_2 + \mu_3 \\ \mu_2 + 2\mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

Lösen dieses inhomogenen linearen Gleichungssystems liefert

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 2,\ \mu_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \psi(x) = (x+2)e^{-x} + 2e^x + xe^x = (x+2)(e^{-x} + e^x)$$

zu Aufgabe 13

a) f ist 2π-periodisch und über $[0, 2\pi]$ integrierbar. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei c_k der k-te Fourier-Koeffizient von f. Dann gilt:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^x e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(1-ik)x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-ik}\,e^{(1-ik)x}\right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-ik}\left(e^{2\pi(1-ik)} - 1\right) \overset{e^{2\pi i}=1}{=\!=} \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-ik}$$

Damit ist die Fourier-Reihe von f gleich

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1-ik}$$

b) Es gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

Auf der linken Seite erhält man:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \left(\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi} \right)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|1-ik|^2} = \frac{\left(e^{2\pi}-1\right)^2}{4\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$$

Und auf der rechten Seite:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \, e^{2x} \right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{e^{4\pi}-1}{4\pi} = \frac{\left(e^{2\pi}-1\right)\left(e^{2\pi}+1\right)}{4\pi}$$

Gleichsetzen und Vereinfachen liefert:

$$e^{2\pi}+1 = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \Longrightarrow \pi \cdot \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} - 1 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1} + \frac{1}{2}$$

zu Aufgabe 14

Induktion nach n:

- $n = 0$:

$$\prod_{k=1}^{0} (2k-1) = 1 = 2^0 \, \frac{\Gamma\left(0+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

- $n \longrightarrow n+1$:

$$\prod_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \prod_{k=1}^{n} (2k-1) \cdot (2(n+1)-1) \overset{\text{(IV)}}{=} 2^n \, \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot (2n+1)$$

$$= 2^{n+1} \, \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \left(n+\frac{1}{2}\right) \overset{(*)}{=} 2^{n+1} \, \frac{\Gamma\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2^{n+1} \, \frac{\Gamma\left((n+1)+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Bei $(*)$ haben wir die Funktionalgleichung der Γ-Funktion, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, für $x = n + \frac{1}{2}$ benutzt.