

Klausur zur Vorlesung LINEARE ALGEBRA II
Montag, 05.07.2010, 10.30 – 13.00 Uhr, HG 4

☐ Frau ☐ Herr

Name:

Muster –

Vorname:

Matrikelnummer:

Lösung

Studiengang:

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen!
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter der Aufgabenstellung, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

VIEL ERFOLG!

A1	A2	A3	A4	A5	Σ
3	3	3	3	3	15

Name:

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(4; \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform von A .

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_A(x) = \det(xE_4 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & x-2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & x-2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & x-3 \end{vmatrix}$$

Entw.
3. Zeile

$$\downarrow \Rightarrow (x-2) \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ 1 & x-2 & 2 \\ -1 & 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

Entw.
2. Spalte

$$\downarrow \Rightarrow (x-2)^2 \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2)^2 ((x-1)(x-3) + 1)$$

$$= (x-2)^2 (x^2 - 4x + 4) = \underline{\underline{(x-2)^4}}$$

Minimalpolynom:

$$\mu_A(x) \mid \chi_A(x) \Rightarrow \mu_A(x) = (x-2)^k, \quad 1 \leq k \leq 4.$$

$$\bullet A - 2E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\cdot (A - 2E_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$\cdot (A - 2E_4)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \mu_A(x) = \underline{\underline{(x-2)^3}}.$$

Jordansche Normalform:

$$\chi_A(x) = (x-2)^4$$

$\Rightarrow A$ hat 2 als einzigen Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 4.

$$\mu_A(x) = (x-2)^3$$

$\Rightarrow$ Der größte Jordan-Block zum Eigenwert 2 ist ein (3×3) -Block.

Folglich ist die Jordansche Normalform von A gleich

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \right\} \begin{matrix} (3 \times 3) - \text{Block} \\ (1 \times 1) - \text{Block} \end{matrix}.$$

Name:

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(3; \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in \mathfrak{M}(3; \mathbb{R})$, so dass $P^t A P$ eine Diagonalmatrix ist.

$$\chi_A(x) = \det(x E_3 - A) = \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 1 \\ 0 & x-6 & 0 \\ 1 & 0 & x-3 \end{vmatrix}$$

Entw.
2. Zeile/Spalte

$$\stackrel{\downarrow}{=} (x-6) \begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-6) \left((x-3)^2 - 1 \right)$$

$$= (x-6) (x^2 - 6x + 8) = (x-2)(x-4)(x-6).$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$.

Eigenräume:

$$\begin{aligned} \bullet V(2, A) &= \text{Kern}(2E_3 - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ON-Basis}} \right\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet V(4, A) &= \text{Kern}(4E_3 - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{ON-Basis}} \right\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet V(6, A) &= \text{Kern}(6E_3 - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ON-Basis}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Wegen $A^t = A$ ist A selbstadjungiert, insbesondere normal, d.h. die Eigenräume bilden eine orthogonale direkte Summe.

Folglich ist $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine ON-Basis von $\mathbb{R}^3$ und

$$P := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3; \mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix. Es gilt

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

d.h. $P^t A P$ ist eine Diagonalmatrix.

Name:

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei V der Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leq n$.
Sei $\varphi: V \rightarrow V$ die Differentiation, d. h.

$$\varphi(a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n) = a_1 + 2a_2X + \dots + na_nX^{n-1}.$$

Zeigen Sie: φ ist ein nilpotenter Endomorphismus von V .

1) φ ist ein Endomorphismus von V , d. h. linear:

$$\text{Für } p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k \in V,$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\varphi(\lambda p(x) + \mu q(x)) = \varphi\left(\sum_{k=0}^n (\lambda a_k + \mu b_k) x^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n k(\lambda a_k + \mu b_k) x^{k-1}$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} + \mu \sum_{k=1}^n k b_k x^{k-1}$$

$$= \lambda \varphi(p(x)) + \mu \varphi(q(x)).$$

Also ist φ linear.

2) φ ist nilpotent:

Sei $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ die kanonische Basis von V .

Für $k = 0, 1, \dots, n$ gilt:

$$\varphi(x^k) = kx^{k-1}.$$

Also ist die Matrix von φ bzgl. $\mathcal{B}$ gleich

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Als obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Diagonalen ist A nach Vorlesung eine nilpotente Matrix.

Dann ist φ ein nilpotenter Endomorphismus.

Name:

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt sei U die auf dem Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

senkrecht stehende Ebene durch den Ursprung.

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U .

Ergänze $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$, etwa durch Tauschen in die kanonische Basis:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Basis von } \mathbb{R}^3.$$

Orthonormiere diese Basis mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren:

$$\underline{b}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{b}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{b}_1 \right) \underline{b}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{b}_2 = \frac{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \cdot \underline{b}_3' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \rho\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_1\right) \underline{b}_1 - \rho\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2\right) \underline{b}_2 \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \underline{b}_3 &= \frac{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Wir erhalten die ON-Basis $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ von $\mathbb{R}^3$.

Es folgt:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle^\perp \stackrel{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3 \text{ ON-Basis}}{=} \left\langle \underline{b}_1 \right\rangle^\perp \stackrel{!}{=} \left\langle \underline{b}_2, \underline{b}_3 \right\rangle.$$

Damit ist

$$\underline{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine ON-Basis der Ebene U .

Name:

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$; und sei φ ein Endomorphismus von V . Für einen Eigenwert λ von φ sei $V(\lambda, \varphi)$ der zugehörige Eigenraum. Weiter sei $\chi_\varphi(X)$ das charakteristische Polynom und $\mu_\varphi(X)$ das Minimalpolynom von φ .

Zeigen Sie: $\chi_\varphi(X) = \mu_\varphi(X)$ genau dann, wenn für jeden Eigenwert λ von φ gilt: $\dim V(\lambda, \varphi) = 1$.

(Anleitung: Überlegen Sie sich, dass $\dim V(\lambda, \varphi)$ die Anzahl der Jordan-Blöcke zum Eigenwert λ in der Jordanschen Normalform von φ ist.)

V ist $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\Rightarrow \chi_\varphi$ zerfällt
 $\Rightarrow \varphi$ hat Jordansche Normalform.

Zur Vereinfachung der Notation habe φ o. B. d. A. nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\chi_\varphi(X) = (X - \lambda)^k, \quad k \geq 1$$

$$\mu_\varphi(X) \mid \chi_\varphi(X) \Rightarrow \mu_\varphi(X) = (X - \lambda)^\ell, \quad 1 \leq \ell \leq k.$$

Sei m die Anzahl der Jordan-Blöcke und

$$j_1 \geq \dots \geq j_m \geq 1$$

die Dimensionen der m Jordan-Blöcke.

Dann gilt nach Vorlesung:

$$j_1 + \dots + j_m = k,$$

(algebraische Vielfachheit)

$$j_1 = \ell,$$

(größter Jordan-Block)

Zusammen:

$$l + j_2 + \dots + j_m = k, \quad (*)$$

Nun bilden die Basisvektoren zur jeweils ersten Spalte jedes Jordan-Blocks eine Basis von $V(\lambda, \varphi)$, d.h. es gilt $\dim V(\lambda, \varphi) = m$.

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} \dim V(\lambda, \varphi) = 1 & \iff m = 1 \\ & \xrightarrow{j_1, \dots, j_m \geq 1} \iff j_2 + \dots + j_m = 0 \\ & \iff l + j_2 + \dots + j_m = l \\ & \xrightarrow{(*)} \iff k = l \\ & \iff \chi_{\varphi}(x) = \mu_{\varphi}(x). \end{aligned}$$