

Lineare Algebra II SoSe 2010 - Lösung Blatt 1

$$(1) (a) (i) \frac{1}{3+7i} = \frac{3-7i}{(3+7i)(3-7i)} = \frac{3-7i}{3^2-7^2i^2}$$
$$= \frac{3-7i}{58} = \underbrace{\frac{3}{58}}_{=a} + i \underbrace{\left(-\frac{7}{58}\right)}_{=b}$$

$$\left| \frac{1}{3+7i} \right| = \left(\left(\frac{3}{58} \right)^2 + \left(-\frac{7}{58} \right)^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{58}}$$

$$(ii) \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 = \left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \right)^2 = \left(\frac{1+2i+i^2}{1^2-i^2} \right)^2$$
$$= \left(\frac{2i}{2} \right)^2 = i^2 = -1 = \underbrace{-1}_{=a} + \underbrace{0 \cdot i}_{=b}$$

$$\left| \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 \right| = |-1| = 1.$$

$$(iii) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$
$$= \underbrace{\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} \right)}_{= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 = \underbrace{1}_{=a} + \underbrace{i \cdot 0}_{=b}$$

$$\left| \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^3 \right| = |1| = 1.$$

(b) Für $z = a+ib \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + 2abi + i^2b^2$$

$$= \underbrace{(a^2 - b^2)}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{(2ab)}_{\text{Imaginärteil}}$$

(i) $z^2 = i$ mit $z = a + ib$ bedeutet:

$$0 + i \cdot 1 = (a^2 - b^2) + i(2ab), \text{ d.h.}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm b \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \pm b \\ \pm 2b^2 = 1 \end{cases} \stackrel{b^2 \neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} a = b \\ 2b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = b = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm i \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

$$\text{Es gilt tats\u00e4chlich } \left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm i \frac{1}{2}\sqrt{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} (\pm(1+i))^2 = i.$$

(ii) Es gilt:

$$z^2 = -i \Leftrightarrow (iz)^2 = -z^2 = i$$

$$\stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} iz = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm i \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -i \left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \pm i \frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} \mp i \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

(2) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z+w|^2 = (z+w) \overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z} + \bar{w})$$

$$= z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w}$$

$$= |z|^2 + z \cdot \bar{w} + \overline{z \cdot \bar{w}} + |w|^2$$

$$= |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \bar{w}) + |w|^2$$

Daraus folgt:

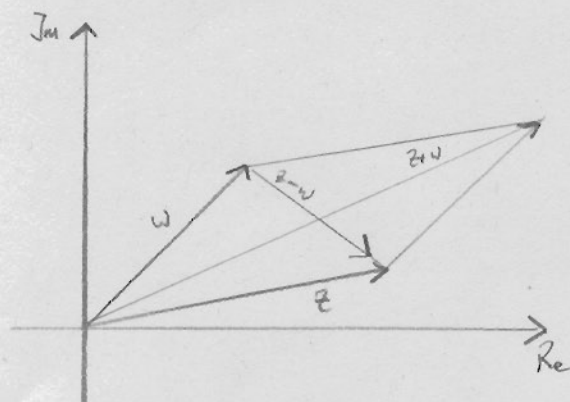
$$|z+w|^2 + |z-w|^2$$

$$= |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \bar{w}) + |w|^2 + |z|^2 + \underbrace{2 \operatorname{Re}(z \overline{(-w)})}_{= -2 \operatorname{Re}(z \bar{w})} + \underbrace{|-w|^2}_{= |w|^2}$$

$$= 2|z|^2 + 2|w|^2$$

Elementargeometrisch ist dies die Parallelogrammgleichung:

„In einem Parallelogramm ist die Summe der quadrierten Längen der Diagonalen gleich der Summe der quadrierten Längen der vier Seiten.“



(3) (a)

- $(W, +)$ ist eine abelsche Gruppe:

Da die Addition in W komponentenweise der Addition in V entspricht und $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist, gilt das auch für $(W, +)$.

Ist $\underline{0}$ das neutrale Element in $(V, +)$, so ist $(\underline{0}, \underline{0})$ das neutrale Element in $(W, +)$.

Das zu $\underline{w} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in W$ inverse Element ist

$$-\underline{w} = (-\underline{v}_1, -\underline{v}_2).$$

- Eigenschaften der skalaren Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times W \rightarrow W$:

* Für $\lambda = a+ib, \mu = u+iv \in \mathbb{C}$ und $\underline{w} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in W$ gilt

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{w} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mult. in } \mathbb{C}}} = ((au - bv) + i(av + bu)) \cdot \underline{w}$$

sk. Mult.

$$\stackrel{\downarrow}{=} ((au - bv)\underline{v}_1 - (av + bu)\underline{v}_2, (au - bv)\underline{v}_2 + (av + bu)\underline{v}_1)$$

und

sk. Mult.

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \underline{w}) \stackrel{\downarrow}{=} \lambda \cdot (u\underline{v}_1 - v\underline{v}_2, u\underline{v}_2 + v\underline{v}_1)$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} (a(u\underline{v}_1 - v\underline{v}_2) - b(u\underline{v}_2 + v\underline{v}_1), a(u\underline{v}_2 + v\underline{v}_1) + b(u\underline{v}_1 - v\underline{v}_2))$$

sk. Mult.

$$\text{Es folgt } (\lambda \cdot \mu) \cdot \underline{w} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{w}).$$

* Für $\underline{w} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in W$ gilt

$$1 \cdot \underline{w} = (1 + i \cdot 0) \cdot \underline{w} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sk. Mult.}}} = (1 \cdot \underline{v}_1 - 0 \cdot \underline{v}_2, 1 \cdot \underline{v}_2 + 0 \cdot \underline{v}_1)$$

$$= (\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \underline{w}.$$

• Distributivität:

* Für $\lambda = a+ib$, $\mu = u+iv \in \mathbb{C}$ und $\underline{w} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in W$ gilt

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{w} \stackrel{\uparrow}{=} ((a+u) + i(b+v)) \cdot \underline{w}$$

sk. Mult.

Add. in $\mathbb{C}$

$$\stackrel{\downarrow}{=} ((a+u)\underline{v}_1 - (b+v)\underline{v}_2, (a+u)\underline{v}_2 + (b+v)\underline{v}_1)$$

und

sk. Mult.

$$\lambda \cdot \underline{w} + \mu \cdot \underline{w} \stackrel{\downarrow}{=} (a\underline{v}_1 - b\underline{v}_2, a\underline{v}_2 + b\underline{v}_1) + (u\underline{v}_1 - v\underline{v}_2, u\underline{v}_2 + v\underline{v}_1)$$

Add. in W

$$\stackrel{\downarrow}{=} ((a\underline{v}_1 - b\underline{v}_2) + (u\underline{v}_1 - v\underline{v}_2), (a\underline{v}_2 + b\underline{v}_1) + (u\underline{v}_2 + v\underline{v}_1)).$$

Es folgt $(\lambda + \mu) \cdot \underline{w} = \lambda \cdot \underline{w} + \mu \cdot \underline{w}$.

* Für $\lambda = a+ib \in \mathbb{C}$, $\underline{w} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in W$ und $\underline{w}' = (\underline{v}_1', \underline{v}_2') \in W$ gilt

$$\lambda \cdot (\underline{w} + \underline{w}') \stackrel{\uparrow}{=} \lambda \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_1', \underline{v}_2 + \underline{v}_2')$$

sk. Mult.

Add. in W

$$\stackrel{\downarrow}{=} (a(\underline{v}_1 + \underline{v}_1') - b(\underline{v}_2 + \underline{v}_2'), a(\underline{v}_2 + \underline{v}_2') + b(\underline{v}_1 + \underline{v}_1'))$$

und

sk. Mult.

$$\lambda \cdot \underline{w} + \lambda \cdot \underline{w}' \stackrel{\downarrow}{=} (a\underline{v}_1 - b\underline{v}_2, a\underline{v}_2 + b\underline{v}_1) + (a\underline{v}_1' - b\underline{v}_2', a\underline{v}_2' + b\underline{v}_1')$$

Add. in W

$$\stackrel{\downarrow}{=} ((a\underline{v}_1 - b\underline{v}_2) + (a\underline{v}_1' - b\underline{v}_2'), (a\underline{v}_2 + b\underline{v}_1) + (a\underline{v}_2' + b\underline{v}_1')).$$

Es folgt $\lambda \cdot (\underline{w} + \underline{w}') = \lambda \cdot \underline{w} + \lambda \cdot \underline{w}'$.

Insgesamt ist $(W, +, \cdot)$ ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

(b) Definiere $\varphi: V \rightarrow W$ durch $\varphi(\underline{v}) = (\underline{v}, \underline{0})$.

Beh.: φ ist injektiv.

Beweis: Seien $\underline{v}, \underline{v}' \in V$ mit $\varphi(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}')$.

Nach Definition von φ heißt das $(\underline{v}, \underline{0}) = (\underline{v}', \underline{0})$.

Durch Vergleich der 1. Komponenten erhält man $\underline{v} = \underline{v}'$.

Also ist φ injektiv.

(c) Für alle $\underline{v}, \underline{v}' \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{v} + \underline{v}') &\stackrel{\uparrow}{=} (\underline{v} + \underline{v}', \underline{0}) \stackrel{\text{Def. } \varphi}{=} (\underline{v} + \underline{v}', \underline{0} + \underline{0}) \\ &\stackrel{\text{Add. in } W}{=} (\underline{v}, \underline{0}) + (\underline{v}', \underline{0}) \stackrel{\text{Def. } \varphi}{=} \varphi(\underline{v}) + \varphi(\underline{v}'). \end{aligned}$$

Für alle $\underline{v} \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(a \cdot \underline{v}) &\stackrel{\uparrow}{=} (a \cdot \underline{v}, \underline{0}) \stackrel{\text{Def. } \varphi}{=} (a \cdot \underline{v} - 0 \cdot \underline{0}, a \cdot \underline{0} + 0 \cdot \underline{v}) \\ &\stackrel{\uparrow}{=} (a + 0i) \cdot (\underline{v}, \underline{0}) \stackrel{\text{Def. } \varphi}{=} a \cdot \varphi(\underline{v}). \end{aligned}$$

Sk. Mult.

(4) Sei $\psi: V \rightarrow V'$ $\mathbb{R}$ -linear.

Beh.: Es gibt genau ein $\hat{\psi}: W \rightarrow W'$ mit $\hat{\psi}(\underline{v}) = \psi(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V$.

Beweis: • Existenz: Für $\underline{w} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in W$ setze

$$\hat{\psi}(\underline{w}) := \left(\underbrace{\psi(\underline{v}_1)}_{\in V'}, \underbrace{\psi(\underline{v}_2)}_{\in V'} \right) \in W'.$$

Dann gilt:

* $\hat{\psi}$ ist $\mathbb{C}$ -linear, denn für $\underline{w} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2), \underline{w}' = (\underline{v}_1', \underline{v}_2') \in W$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\underline{w} + \underline{w}') &\stackrel{\text{Add. in } W}{=} \hat{\psi}((\underline{v}_1 + \underline{v}_1', \underline{v}_2 + \underline{v}_2')) \\ &\stackrel{\text{Def. } \hat{\psi}}{=} \left(\psi(\underline{v}_1 + \underline{v}_1'), \psi(\underline{v}_2 + \underline{v}_2') \right) \stackrel{\psi \text{ } \mathbb{R}\text{-linear}}{=} \left(\psi(\underline{v}_1) + \psi(\underline{v}_1'), \psi(\underline{v}_2) + \psi(\underline{v}_2') \right) \\ &\stackrel{\text{Add. in } W'}{=} \left(\psi(\underline{v}_1), \psi(\underline{v}_2) \right) + \left(\psi(\underline{v}_1'), \psi(\underline{v}_2') \right) \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \hat{\psi}(\underline{w}) + \hat{\psi}(\underline{w}') \end{aligned}$$

Def. $\hat{\psi}$

und für $\underline{w} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in W$ und $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\lambda \cdot \underline{w}) &\stackrel{\uparrow}{=} \hat{\psi}((a\underline{v}_1 - b\underline{v}_2, a\underline{v}_2 + b\underline{v}_1)) \\ &\stackrel{\text{Def. } \hat{\psi}}{=} \left(\psi(a\underline{v}_1 - b\underline{v}_2), \psi(a\underline{v}_2 + b\underline{v}_1) \right) \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \left(a\psi(\underline{v}_1) - b\psi(\underline{v}_2), a\psi(\underline{v}_2) + b\psi(\underline{v}_1) \right) \\ &\stackrel{\psi \text{ } \mathbb{R}\text{-linear}}{=} \lambda \cdot \left(\psi(\underline{v}_1), \psi(\underline{v}_2) \right) \stackrel{\text{Def. } \hat{\psi}}{=} \lambda \cdot \hat{\psi}(\underline{w}). \end{aligned}$$

Sk. Mult.

* Für alle $\underline{v} \in V$ gilt

$$\hat{\psi}(\underline{v}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Identifikation}}}{=} \hat{\psi}(\underline{v}, \underline{0}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Def. } \hat{\psi}}}{=} (\psi(\underline{v}), \psi(\underline{0}))$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \psi \text{ } \mathbb{R}\text{-linear}}}{=} (\psi(\underline{v}), \underline{0}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Identifikation}}}{=} \psi(\underline{v})$$

• Eindeutigkeit: Für alle $\underline{w} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in W$ gilt

$$\underline{w} = (\underline{v}_1, \underline{0}) + (\underline{0}, \underline{v}_2) = (\underline{v}_1, \underline{0}) + i \cdot (\underline{v}_2, \underline{0})$$

$$\stackrel{\text{Ident.}}{=} = (0 \cdot \underline{v}_2 - 1 \cdot \underline{0}, 0 \cdot \underline{0} + 1 \cdot \underline{v}_2)$$

$$\stackrel{\downarrow}{=} \underline{v}_1 + i \cdot \underline{v}_2$$

Sind also $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2: W \rightarrow U'$ zwei Abbildungen mit den gewünschten Eigenschaften, so gilt für $j \in \{1, 2\}$ und $\underline{w} = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in W$:

$$\hat{\psi}_j(\underline{w}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{S.o.}}}{=} \hat{\psi}_j(\underline{v}_1 + i \underline{v}_2) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \hat{\psi}_j \text{ } \mathbb{C}\text{-linear}}}{=} \hat{\psi}_j(\underline{v}_1) + i \cdot \hat{\psi}_j(\underline{v}_2)$$

$$\stackrel{\text{Vor.}}{=} \psi(\underline{v}_1) + i \psi(\underline{v}_2) \quad (\text{unabhängig von } j)$$

$$\text{D.h. } \hat{\psi}_1(\underline{w}) = \hat{\psi}_2(\underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in W,$$

$$\text{also } \hat{\psi}_1 = \hat{\psi}_2.$$