Sommersemester 2010

1. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Abgabe: Do., 22.04.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

(1) (a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Normalform $a + ib$ und berechnen Sie ihre absoluten Beträge.

$$\text{(i) } \frac{1}{3+7i}, \quad \text{(ii) } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2, \quad \text{(iii) } \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3.$$

(b) Bestimmen Sie jeweils eine komplexe Zahl z mit

$$\text{(i) } z^2 = i, \quad \text{(ii) } z^2 = -i.$$

(2) Beweisen Sie die Gleichung

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

für alle komplexen Zahlen z und w. Welcher geometrische Satz ist damit bewiesen?

(3) Sei V ein reeller Vektorraum, und sei $W = V \times V$ die Menge aller geordneten Paare von Vektoren aus V. Für je zwei Paare $\underline{\underline{w}} = (\underline{\underline{v_1}}, \underline{\underline{v_2}})$ und $\underline{\underline{w'}} = (\underline{\underline{v_1}}', \underline{\underline{v_2}}')$ definiere man

$$\underline{\underline{w}} + \underline{\underline{w'}} = (\underline{\underline{v_1}} + \underline{\underline{v_1}}', \underline{\underline{v_2}} + \underline{\underline{v_2}}').$$

Ist $\lambda = a + ib$ eine komplexe Zahl, so definiere man

$$\lambda \cdot \underline{\underline{w}} = (a \cdot \underline{\underline{v_1}} - b \cdot \underline{\underline{v_2}}, a \cdot \underline{\underline{v_2}} + b \cdot \underline{\underline{v_1}}).$$

(a) Zeigen Sie, dass W mit den so definierten linearen Operationen ein komplexer Vektorraum mit dem Paar $(\underline{\underline{0}}, \underline{\underline{0}})$ als Nullvektor ist.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\varphi(\underline{\underline{v}}) = (\underline{\underline{v}}, \underline{\underline{0}})$$

eine injektive Abbildung $\varphi : V \to W$ definiert wird.

(c) Zeigen Sie: Für alle $\underline{\underline{v}}, \underline{\underline{v}}' \in V$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi(\underline{\underline{v}} + \underline{\underline{v}}') = \varphi(\underline{\underline{v}}) + \varphi(\underline{\underline{v}}') \quad \text{und} \quad \varphi(a \cdot \underline{\underline{v}}) = a \cdot \varphi(\underline{\underline{v}}),$$

wobei a ggf. als komplexe Zahl $a + 0i$ aufzufassen ist.

(Bemerkung: Der komplexe Vektorraum W heißt die *komplexe Erweiterung* des reellen Vektorraums V. Die Abbildung φ bettet V isomorph in W ein, so dass im Folgenden der Vektor $\underline{\underline{v}} \in V$ mit dem Paar $\varphi(\underline{\underline{v}}) = (\underline{\underline{v}}, \underline{\underline{0}})$ identifiziert werden kann.)

bitte wenden!

(4) Es sei $\psi : V \to V'$ eine lineare Abbildung der reellen Vektorräume V und V'. Ferner seien W und W' die komplexen Erweiterungen von V und V' aus Aufgabe (3). Zeigen Sie, dass genau eine lineare Abbildung $\hat{\psi} : W \to W'$ existiert mit $\hat{\psi}(\underline{\underline{v}}) = \psi(\underline{\underline{v}})$ für alle $\underline{\underline{v}} \in V$.