

10. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Abgabe: Do., 24.06.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

- (1) Sei V ein Vektorraum über dem Körper K mit $\dim V = 2$. Sei φ ein Endomorphismus von V .

Zeigen Sie: Entweder ist V φ -zyklisch oder es gibt ein Element $\alpha \in K$, so dass gilt: $\varphi = \alpha \operatorname{id}_V$.

- (2) Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K . Sei φ ein Endomorphismus von V .

Zeigen Sie: Ist V φ^2 -zyklisch, so ist V auch φ -zyklisch.

Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (3) Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über dem Körper K . Sei φ ein diagonalisierbarer Endomorphismus von V .

Zeigen Sie: V ist φ -zyklisch genau dann, wenn φ n verschiedene Eigenwerte hat. Besitzt φ n verschiedene Eigenwerte und ist $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ eine Basis von V , welche aus Eigenvektoren besteht, so ist $\underline{a} := \underline{a}_1 + \dots + \underline{a}_n$ ein φ -zyklischer Vektor für V .

- (4) Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über dem Körper K . Sei φ ein Endomorphismus von V , so dass V φ -zyklisch ist.

Zeigen Sie: Jeder Endomorphismus ψ von V , der mit φ vertauschbar ist (für den also gilt: $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$), lässt sich als Polynom in φ darstellen.

(Genauer: Zu ψ gibt es Elemente $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$, so dass für jedes $\underline{v} \in V$ gilt: $\psi(\underline{v}) = a_0 \underline{v} + a_1 \varphi(\underline{v}) + \dots + a_{n-1} \varphi^{n-1}(\underline{v})$.)