

11. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Abgabe: Do., 01.07.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

(1) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(5; \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform von A .

(2) Sei $A \in \mathfrak{M}(5; \mathbb{R})$ eine Matrix mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi_A(X) = (X - 2)^2(X + 7)^3$$

und mit dem Minimalpolynom

$$\mu_A(X) = (X - 2)(X + 7)^2.$$

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A . Begründen Sie Ihr Ergebnis.

(3) Sei V der Vektorraum der Polynome mit komplexen Koeffizienten vom Grad $\leq n$. Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sei $\varphi : V \rightarrow V$ der durch

$$f(X) \mapsto f(X + a)$$

definierte Endomorphismus.

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von φ (d. h. die Jordansche Normalform einer Koordinatenmatrix von φ).

(4) Seien K ein Körper und n eine natürliche Zahl. Seien A und B zerfallende Matrizen in $\mathfrak{M}(n; K)$.

Zeigen Sie: A ist zu B ähnlich genau dann, wenn für alle $\lambda \in K$ und für alle ν mit $0 \leq \nu \leq n$ gilt:

$$\text{Rang}(\lambda E_n - A)^\nu = \text{Rang}(\lambda E_n - B)^\nu.$$