

12. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“keine Abgabe

- (1) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{C})$ normal. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A . Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2.$$

- (2) Seien $A, B \in \mathfrak{M}(3; K)$ nilpotent, und gelte $A \neq \mathbf{0}$, $B \neq \mathbf{0}$. A und B seien nicht ähnlich. Überprüfen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

Eine der beiden Matrizen ist ähnlich zum Quadrat der anderen.

- (3) Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{R}),$$

wobei $*$ für nicht näher bestimmte Elemente aus $\mathbb{R}$ stehe.

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A .

- (4) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

- (i) Jede Matrix $A \in \mathfrak{M}(2n-1; \mathbb{R})$ besitzt einen Eigenvektor.
- (ii) Es gibt ein $A \in \mathfrak{M}(2n; \mathbb{R})$, welches keinen Eigenvektor besitzt.

- (5) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 0 \\ -2i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(3; \mathbb{C}).$$

Zeigen Sie: A lässt sich mit einer unitären Matrix U diagonalisieren. Bestimmen Sie U .

bitte wenden!

(6) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{R})$. Sei $f_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^t A \underline{y}$$

gegeben.

Zeigen Sie: Ist f_A ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, so gilt für $k = 1, \dots, n$: $a_{kk} > 0$.

(7) Im $\mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen Skalarprodukt sei U der von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

erzeugte Unterraum.

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U .

(8) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, und sei $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:
Durch

$$\beta(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}) \overline{\varphi(\underline{w})}$$

wird eine hermitesche Form

$$\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$$

definiert.

Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass β ein Skalarprodukt ist.