

Lineare Algebra II SoSe 2010 — Lösung Blatt 2

$$(1) A := \begin{pmatrix} -10 & 2 & -20 \\ -3 & 0 & -5 \\ 6 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Über $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$ gilt:

$$\chi_A(x) = \det(xE_3 - A) = \begin{vmatrix} x+10 & -2 & 20 \\ 3 & x & 5 \\ -6 & 1 & x-12 \end{vmatrix}$$

Entw. 1.2.

$$\stackrel{!}{=} (x+10)(x(x-12)-5) + 2(3(x-12)+30) + 20(3+6x)$$

$$= (x+10)(x^2-12x-5) + 2(3x-6) + 20(3+6x)$$

$$= x^3 - 12x^2 - 5x + 10x^2 - 120x - 50 + 6x - 12 + 60 + 120x$$

$$= x^3 - 2x^2 + x - 2 = \underline{\underline{(x-2)(x^2+1)}}.$$

Da χ_A über $\mathbb{Q}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt, ist A über $\mathbb{Q}$ nicht diagonalisierbar.

Über $\mathbb{C}$ gilt weiter:

$$\chi_A(x) = (x-2)(x-i)(x+i) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, i, -i\},$$

d.h. die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$.

Bestimmung der Eigenräume:

$$\underline{\lambda_1 = 2:}$$

$$2E_3 - A = \begin{pmatrix} 12 & -2 & 20 \\ 3 & 2 & 5 \\ -6 & 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \\ \xleftarrow{+} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 12 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xleftarrow{-(-4)} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V(2, A) = \left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\underline{\lambda_2 = i:}$$

$$iE_3 - A = \begin{pmatrix} i+10 & -2 & 20 \\ 3 & i & 5 \\ -6 & 1 & i-12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 2 \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 3i+30 & -6 & 60 \\ 3 & i & 5 \\ 0 & 1+2i & i-2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot (-10-i) \\ \cdot 5 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -5-10i & 10-5i \\ 3 & i & 5 \\ 0 & 1+2i & i-2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \cdot 5 \\ \cdot 5 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & i & 5 \\ 0 & 1+2i & i-2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 5 \leftarrow + \\ \cdot (-2-i) \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 30 \\ 0 & 1+2i & i-2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V(i, A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\underline{\lambda_3 = -i:}$$

$$-iE_3 - A = \begin{pmatrix} -i+10 & -2 & 20 \\ 3 & -i & 5 \\ -6 & 1 & -i-12 \end{pmatrix} = \overline{iE_3 - A}$$

Für $\underline{v} \in \mathbb{C}^3$ gilt:

$$(-iE_3 - A) \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow \overline{(iE_3 - A)} \underline{v} = \underline{0} \Leftrightarrow (iE_3 - A) \overline{\underline{v}} = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\underline{v}} \in \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \Leftrightarrow \underline{v} \in \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\text{d.h. } V(-i, A) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wir erhalten die Basis $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{C}^3$ aus Eigenvektoren von A . Insbesondere ist A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

(2) Sei $n \in \mathbb{N}$, $V = M(n, \mathbb{C})$, $f: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(A, B) := n \operatorname{Spur}(AB) - \operatorname{Spur}(A) \operatorname{Spur}(B).$$

(a) Beh.: f ist symmetrische Bilinearform.

Beweis. • f ist linear im ersten Argument:

Für $A, A' \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \mu A', B) &= n \operatorname{Spur}((\lambda A + \mu A') B) \\ &\quad - \operatorname{Spur}(\lambda A + \mu A') \operatorname{Spur}(B) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} n \operatorname{Spur}(\lambda (A B) + \mu (A' B)) - \operatorname{Spur}(\lambda A + \mu A') \operatorname{Spur}(B)$$

Matrixmult.
bilinear

$$= n \lambda \operatorname{Spur}(A B) + n \mu \operatorname{Spur}(A' B) - \lambda \operatorname{Spur}(A) \operatorname{Spur}(B)$$

$\uparrow$
Spur linear

$$- \mu \operatorname{Spur}(A') \operatorname{Spur}(B)$$

$$= \lambda (n \operatorname{Spur}(A B) - \operatorname{Spur}(A) \operatorname{Spur}(B))$$

$$+ \mu (n \operatorname{Spur}(A' B) - \operatorname{Spur}(A') \operatorname{Spur}(B))$$

$$= \lambda f(A, B) + \mu f(A', B).$$

• f ist symmetrisch: Mit $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ gilt:

$$\operatorname{Spur}(AB) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \right) = \operatorname{Spur}(BA),$$

$$\begin{aligned} \text{d.h. } f(A, B) &= n \operatorname{Spur}(AB) - \operatorname{Spur}(A) \operatorname{Spur}(B) \\ &= n \operatorname{Spur}(BA) - \operatorname{Spur}(B) \operatorname{Spur}(A) = f(B, A). \end{aligned}$$

Insgesamt ist f eine symmetrische Bilinearform.

(b) Beh.: f ist ausgeartet.

Beweis: Mit $A := E_n$ gilt $\operatorname{Spur}(A) = n$ und damit für alle $B \in V$:

$$f(A, B) = n \operatorname{Spur}(\underbrace{AB}_{=B}) - \underbrace{\operatorname{Spur}(A)}_{=n} \operatorname{Spur}(B) = 0.$$

Andererseits ist $A \neq 0$, so dass f ausgeartet ist.

(c) $V_1 := \{A \in V \mid \operatorname{Spur}(A) = 0\}$, $f_1 := f|_{V_1 \times V_1}$.

Beh.: f_1 ist nicht ausgeartet.

Beweis: Sei $A = (\alpha_{ij}) \in V_1$ mit $A \neq 0$. Dann ist $\alpha_{kl} \neq 0$ für gewisse Indizes $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Mit $B := \bar{A}^T = (\bar{\alpha}_{ji})$ gilt:

• $B \in V_1$ wegen $\operatorname{Spur}(B) = \overline{\operatorname{Spur}(A)} = 0$.

$$f(A, B) = n \operatorname{Spur}(AB) - \underbrace{\operatorname{Spur}(A)}_{=0} \operatorname{Spur}(B)$$

$$= n \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \bar{\alpha}_{ij} \right) = n \sum_{i,j=1}^n \underbrace{|\alpha_{ij}|^2}_{\geq 0} \geq n |\alpha_{kl}|^2 > 0,$$

d.h. f_1 ist nicht ausgeartet.

(3) (V, β) unitärer Raum, $U \subset V$ Unterraum, $\pi_U: V \rightarrow U$ orthogonale Projektion.

Beh.: $\forall \underline{v} \in V \quad \forall \underline{w} \in U$ mit $\underline{w} \neq \pi_U(\underline{v}) : \|\underline{v} - \pi_U(\underline{v})\| < \|\underline{v} - \underline{w}\|$.

Beweis: Es gilt:

$$(i) \quad \underline{v} = \underbrace{(\underline{v} - \pi_U(\underline{v}))}_{\in U^\perp} + \underbrace{\pi_U(\underline{v})}_{\in U} \Rightarrow 0 = \beta(\underline{v} - \pi_U(\underline{v}), \pi_U(\underline{v}))$$

$$= \beta(\underline{v}, \pi_U(\underline{v})) - \|\pi_U(\underline{v})\|^2 \Rightarrow \beta(\underline{v}, \pi_U(\underline{v})) = \|\pi_U(\underline{v})\|^2.$$

$$(ii) \text{ genauso: } 0 = \beta(\underline{v} - \pi_U(\underline{v}), \underline{w}) = \beta(\underline{v}, \underline{w}) - \beta(\pi_U(\underline{v}), \underline{w})$$

$$\Rightarrow \beta(\underline{v}, \underline{w}) = \beta(\pi_U(\underline{v}), \underline{w}).$$

Damit folgt:

$$\|\underline{v} - \underline{w}\|^2 - \|\underline{v} - \pi_U(\underline{v})\|^2$$

$$= \|\underline{v}\|^2 - \beta(\underline{v}, \underline{w}) - \beta(\underline{w}, \underline{v}) + \|\underline{w}\|^2$$

$$= \|\underline{v}\|^2 + \underbrace{\beta(\underline{v}, \pi_U(\underline{v})) + \beta(\pi_U(\underline{v}), \underline{v})}_{\stackrel{(i)}{=} 2\|\pi_U(\underline{v})\|^2} - \|\pi_U(\underline{v})\|^2$$

$$\stackrel{(ii)}{=} \|\underline{w}\|^2 - \beta(\pi_U(\underline{v}), \underline{w}) - \beta(\underline{w}, \pi_U(\underline{v})) + \|\pi_U(\underline{v})\|^2$$

$$= \underbrace{\|\underline{w} - \pi_U(\underline{v})\|^2}_{\neq 0} > 0 \Rightarrow \|\underline{v} - \pi_U(\underline{v})\|^2 < \|\underline{v} - \underline{w}\|^2$$

$\neq 0$
vor

$\Rightarrow$ Beh.

$$(4) \mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

(a) Beh.: $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ ist Schiefkörper.

($\mathbb{H}$ heißt Schiefkörper der Quaternionen.)

Beweis:

Zu (i): Wissen: $M(2; \mathbb{C})$ ist $\mathbb{C}$ -Vektorraum

$\Rightarrow (M(2; \mathbb{C}), +)$ ist abelsche Gruppe mit neutralem Element $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

genügt $\mathbb{H}$: $\mathbb{H} \subset M(2; \mathbb{C})$ ist Untergruppe:

- $\mathbb{H} \neq \emptyset$ wegen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$.

- $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -\overline{b+d} & \overline{a+c} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}.$$

- $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ gilt

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -(-\bar{b}) & -\bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}.$$

Also ist $(\mathbb{H}, +)$ eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Zu (ii):

- Abgeschlossenheit: Für $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ gilt.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b\bar{d} & ad + b\bar{c} \\ -\overline{ad + b\bar{c}} & \overline{ac - b\bar{d}} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

Außerdem existiert $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} \in H$ (s.u.) und aus

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ w\u00fcrde folgen:}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ im Widerspruch zur}$$

Voraussetzung. Also ist sogar $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix} \in H \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

- Assoziativit\u00e4t: klar, da Matrixmultiplikation stets assoziativ ist.

- Existenz eines linksneutralen Elements: Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H \text{ ein linksneutrales Element bzgl. } \cdot$$

- Existenz von linksinversen Elementen: F\u00fcr $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in H \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist $\det \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2 \neq 0$, d.h. es existiert

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \in H \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ mit}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) gilt allgemein f\u00fcr die Multiplikation und Addition von Matrizen.

$$(b) \varphi: \mathbb{C} \rightarrow H, \quad \varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Beh.: φ ist injektiv.

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $\varphi(a) = \varphi(b)$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}, \text{ also } a = b, \text{ d.h.}$$

φ ist injektiv.

Beh.: $\forall a, b \in \mathbb{C}: \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Beweis:
$$\varphi(a+b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & \overline{a+b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & \bar{a} + \bar{b} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Beh.: $\forall a, b \in \mathbb{C}$ gilt $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Beweis:
$$\varphi(a \cdot b) = \begin{pmatrix} a \cdot b & 0 \\ 0 & \overline{a \cdot b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot b & 0 \\ 0 & \bar{a} \cdot \bar{b} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix} = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

(c) Wir schreiben $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Beh.: $G := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ ist eine nichtabelsche Untergruppe von $(\mathbb{H} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Beweis: Offenbar ist $\emptyset \neq G \subset \mathbb{H} \setminus \{0\}$.

Wir haben die folgende Multiplikationstafel:

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Es folgt $x \cdot y \in G$ für alle $x, y \in \{1, i, j, k\}$.

Zusammen mit $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ und

$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y \quad \forall x, y \in G$ folgt die Abgeschlossenheit von G unter $\cdot$.

An der Tabelle liest man ab, dass

$$1^{-1} = 1, \quad i^{-1} = -i, \quad j^{-1} = -j, \quad k^{-1} = -k \in G \text{ gilt}$$

Also ist G eine Untergruppe von $(\mathbb{H} \setminus \{(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})\}, \cdot)$.

G ist nichtabelsch, denn z. B.

$$i \cdot j = k \neq -k = j \cdot i.$$

(d) Beh.: $\pm i, \pm j, \pm k$ sind Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$ in $\mathbb{H}$.

Beweis: Folgt aus der Tabelle in (c).

Beh.: Die Gleichung $x^2 = -1$ besitzt in $\mathbb{H}$ unendlich viele Lösungen.

Beweis: Schreibt man $a = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$, so gibt es unendlich viele a mit $|a|^2 = u^2 + v^2 = 1$. Für solche a ist

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -\bar{a} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

mit

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -\bar{a} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -|a|^2 & 0 \\ 0 & -|a|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Ident. wie in (b)}}{=} -1.$$