

2. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Abgabe: Do., 29.04.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

- (1) Zeigen Sie: Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -10 & 2 & -20 \\ -3 & 0 & -5 \\ 6 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

ist als Matrix in $\mathfrak{M}(3; \mathbb{C})$ diagonalisierbar und als Matrix in $\mathfrak{M}(3; \mathbb{Q})$ nicht diagonalisierbar.

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{C}^3$, welche aus Eigenvektoren von A besteht.

- (2) Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten $V = \mathfrak{M}(n; \mathbb{C})$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit den üblichen Verknüpfungen. Weiter sei

$$\begin{aligned} f : V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (A, B) &\longmapsto n \operatorname{Spur}(AB) - \operatorname{Spur}(A) \operatorname{Spur}(B). \end{aligned}$$

- (a) Zeigen Sie: f ist eine symmetrische Bilinearform.
(b) Zeigen Sie: f ist ausgeartet, d. h. $\exists A \neq 0 : \forall B : f(A, B) = 0$.
(c) Es sei $V_1 = \{A \in V : \operatorname{Spur}(A) = 0\}$. Es bezeichne f_1 die Restriktion von f auf $V_1 \times V_1$. Zeigen Sie: f_1 ist nichtausgeartet, d. h. $\forall A \in V_1, A \neq 0 : \exists B \in V_1 : f(A, B) \neq 0$.
- (3) Sei (V, β) ein unitärer Raum. Sei U ein Unterraum von V , und sei π_U die orthogonale Projektion von V auf U . Zeigen Sie: Für jedes $\underline{v} \in V$ gilt:
 $\forall \underline{w} \in U$ mit $\underline{w} \neq \pi_U(\underline{v}) : \|\underline{v} - \pi_U(\underline{v})\| < \|\underline{v} - \underline{w}\|$.

bitte wenden!

(4) Sei K eine nichtleere Menge mit den beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$. Das Tripel $(K, +, \cdot)$ heißt *Schiefkörper* $\iff$

- (i) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element 0 .
- (ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe.
- (iii) $\forall a, b, c \in K$ gelten

$$\begin{aligned} a(b + c) &= (ab) + (ac), \\ (a + b)c &= (ac) + (bc). \end{aligned}$$

(Im Gegensatz zu einem Körper ist in (ii) nicht gefordert, dass die Gruppe abelsch sei.)

Sei $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$. Zeigen Sie:

- (a) $\mathbb{H}$ bildet mit der Addition und Multiplikation von Matrizen einen Schiefkörper.
- (b) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ mit

$$\varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$$

ist injektiv und erfüllt

$$\forall a, b \in \mathbb{C} : \quad \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Daher kann $\mathbb{C}$ als Teilkörper von $\mathbb{H}$ aufgefasst werden.

$$(c) \quad \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist bei $\cdot$ eine nichtabelsche Untergruppe von $\left(\mathbb{H} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \cdot \right)$.

- (d) Die Elemente

$$\pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

sind Lösungen der Gleichung $x^2 = -1$ in $\mathbb{H}$. Zeigen Sie: Tatsächlich besitzt diese Gleichung unendlich viele Lösungen in $\mathbb{H}$.

$\left(-1 \text{ ist mit } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ zu identifizieren, vgl. (b).} \right)$