

Lineare Algebra II SoSe 2010 — Lösung Blatt 3

(1) (V, β) unitärer Raum, $\dim V = n$, $\varphi \in \text{End}(V)$,
 $X_\varphi(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ char. Polynom.

gesucht: X_{φ^*} .

Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} X_{\varphi^*}(\lambda) &= \det(\lambda \text{id}_V - \varphi^*) \\ &= \det((\bar{\lambda} \text{id}_V)^* - \varphi^*) = \det((\bar{\lambda} \text{id}_V - \varphi)^*) \end{aligned}$$

Ist nun $A \in M(n; \mathbb{C})$ die Matrix von $\bar{\lambda} \text{id}_V - \varphi$ bzgl. einer ON-Basis von V , so ist $A^* = \bar{A}^T$ die Matrix von $(\bar{\lambda} \text{id}_V - \varphi)^*$ bzgl. derselben Basis und es gilt:

$$\begin{aligned} \det((\bar{\lambda} \text{id}_V - \varphi)^*) &= \det(A^*) \stackrel{\text{Laplace-Formel}}{=} \overline{\det(A)} \\ &= \overline{\det(\bar{\lambda} \text{id}_V - \varphi)} = \overline{X_\varphi(\bar{\lambda})} \\ &= \overline{a_0 + a_1 \bar{\lambda} + \dots + a_n \bar{\lambda}^n} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \lambda + \dots + \bar{a}_n \lambda^n. \end{aligned}$$

Es folgt

$$X_{\varphi^*}(X) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 X + \dots + \bar{a}_n X^n.$$

(2) (V, β) unitärer Raum, $\dim V < \infty$, $\varphi \in \text{End}(V)$ normal.

(a) Beh.: Jedes $\underline{v} \in V$ hat eindeutige Darstellung $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ mit $\underline{u} \in \varphi(V)$, $\underline{w} \in \text{Kern}(\varphi)$. Dabei gilt $\underline{u} \perp \underline{w}$.

Beweis:

$\dim V < \infty$, $\varphi(V) \subset V$ Unterraum

$$\stackrel{VL}{\Rightarrow} V = \varphi(V) \oplus \varphi(V)^\perp$$

$$\text{aber: } \varphi(V)^\perp \stackrel{\uparrow VL}{=} \text{Kern}(\varphi^*) \stackrel{\uparrow \varphi \text{ normal}}{=} \text{Kern}(\varphi)$$

Also: $V = \varphi(V) \oplus \text{Kern}(\varphi)$,

d.h. jedes $\underline{v} \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung wie in der Behauptung

Dabei gilt $\underline{u} \in \varphi(V)$, $\underline{w} \in \text{Kern}(\varphi) = \varphi(V)^\perp \Rightarrow \underline{u} \perp \underline{w}$.

(b) Beh.: $\varphi(V) = \varphi^2(V)$.

Beweis: „ $\supset$ “: $\underline{w} \in \varphi^2(V) \Rightarrow \exists \underline{v} \in V: \underline{w} = \varphi^2(\underline{v})$

$$= \varphi(\underbrace{\varphi(\underline{v})}_{\in V}) \in \varphi(V).$$

„ $\subset$ “: $\underline{x} \in \varphi(V) \Rightarrow \exists \underline{v} \in V: \varphi(\underline{v}) = \underline{x}$.

nach (a): $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ mit $\underline{u} \in \varphi(V)$, $\underline{w} \in \text{Kern}(\varphi)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{x} &= \varphi(\underline{v}) = \varphi(\underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{u}) + \underbrace{\varphi(\underline{w})}_{= \underline{0}, \text{ da } \underline{w} \in \text{Kern}(\varphi)} \\ &= \varphi(\underline{u}) \in \varphi(\varphi(V)) = \varphi^2(V). \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $\underline{u} \in \varphi(V)$

(3) (V, β) unitärer Raum, $\dim V < \infty$, $U \subseteq V$ Unterraum,
 $\pi_U \in \text{End}(V)$ orthogonale Projektion von V auf U .

Beh. $\pi_U = \pi_U^*$.

Beweis:

$$V = U \oplus U^\perp$$

$\Rightarrow$ Jedes $\underline{v} \in V$ hat eindeutige Darstellung $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$
mit $\underline{u} \in U$, $\underline{w} \in U^\perp$

$$\Rightarrow \pi_U(\underline{v}) = \underline{u}.$$

Die Beh. $\pi_U = \pi_U^*$ bedeutet:

$$\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V: \beta(\pi_U(\underline{v}_1), \underline{v}_2) = \beta(\underline{v}_1, \pi_U(\underline{v}_2))$$

Seien also $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ beliebig.

Schreibe $\underline{v}_1 = \underline{u}_1 + \underline{w}_1$, $\underline{v}_2 = \underline{u}_2 + \underline{w}_2$ mit $\underline{u}_i \in U$, $\underline{w}_i \in U^\perp$.

Dann gilt:

$$\beta(\pi_U(\underline{v}_1), \underline{v}_2) = \beta(\underline{u}_1, \underline{v}_2) = \beta(\underline{u}_1, \underline{u}_2 + \underline{w}_2)$$

$$= \beta(\underline{u}_1, \underline{u}_2) + \underbrace{\beta(\underline{u}_1, \underline{w}_2)}_{=0, \text{ da } \underline{u}_1 \in U, \underline{w}_2 \in U^\perp} = \beta(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$$

$$= \beta(\underline{u}_1, \underline{u}_2) + \underbrace{\beta(\underline{w}_1, \underline{u}_2)}_{=0, \text{ da } \underline{w}_1 \in U^\perp, \underline{u}_2 \in U}$$

$$= \beta(\underline{u}_1 + \underline{w}_1, \underline{u}_2) = \beta(\underline{v}_1, \underline{u}_2) = \beta(\underline{v}_1, \pi_U(\underline{v}_2))$$

$\Rightarrow$ Beh.

$$(4) \beta: M(n; \mathbb{C}) \times M(n; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C},$$

$$(A, B) \mapsto \text{Spur}(A B^*).$$

(a) Beh.: $(M(n; \mathbb{C}), \beta)$ ist ein unitärer Raum.

Beweis: Wissen: $M(n; \mathbb{C})$ ist $\mathbb{C}$ -Vektorraum und

$$\beta: M(n; \mathbb{C}) \times M(n; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

$\Rightarrow$ genügt $\frac{1}{2}$: β ist Skalarprodukt.

(i) β ist $\mathbb{C}$ -linear im ersten Argument:

Für $A, B, C \in M(n; \mathbb{C})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\beta(\lambda A + \mu B, C) = \text{Spur}((\lambda A + \mu B) C^*)$$

$$= \text{Spur}(\lambda (A C^*) + \mu (B C^*))$$

$$= \lambda \text{Spur}(A C^*) + \mu \text{Spur}(B C^*)$$

$\uparrow$
Spur linear

$$= \lambda \beta(A, C) + \mu \beta(B, C).$$

(ii) β ist hermitesch:

Für $A, B \in M(n; \mathbb{C})$ gilt:

$$\beta(A, B) = \text{Spur}(A B^*) = \text{Spur}(A \bar{B}^T)$$

$$= \text{Spur}((A \bar{B}^T)^T) = \text{Spur}(\bar{B} A^T)$$

$$= \overline{\text{Spur}(\bar{B} A^T)} = \overline{\text{Spur}(B \bar{A}^T)}$$

$$= \overline{\text{Spur}(B A^*)} = \beta(B, A).$$

(iii) β ist positiv definit:

Für $A = (\alpha_{ij}) \in M(n; \mathbb{C})$ gilt:

$$\begin{aligned}\beta(A, A) &= \text{Spur}(AA^*) = \text{Spur}(A\bar{A}^T) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \overline{\alpha_{ij}} = \sum_{i,j=1}^n \underbrace{|\alpha_{ij}|^2}_{\geq 0 \quad \forall i,j} \geq 0\end{aligned}$$

$$\text{und } \beta(A, A) = 0 \Leftrightarrow \forall i,j: \alpha_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0.$$

(b) Seien $A, B \in M(n; \mathbb{C})$ normal mit $AB = 0$.

Beh.: $BA = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Beweis: } \beta(BA, BA) &= \text{Spur}(BA(BA)^*) \\ &= \text{Spur}(BA \underbrace{A^* B^*}_{\substack{\uparrow \\ A \text{ normal}}}) = \text{Spur}(BA^* \underbrace{A B^*}_{\substack{\uparrow \\ B \text{ normal}}}) \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Spur}(CD) \\ = \text{Spur}(DC)}}{=} \text{Spur}(A \underbrace{B^* B}_{\substack{\uparrow \\ B \text{ normal}}} A^*) \stackrel{\substack{\uparrow \\ B \text{ normal}}}{=} \text{Spur}(A \underbrace{B B^*}_{=0} A^*) = 0 \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \beta \text{ pos def.}}}{\Rightarrow} BA = 0.\end{aligned}$$