

3. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Abgabe: Do., 06.05.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

- (1) Sei (V, β) ein n -dimensionaler unitärer Raum. Sei φ ein Endomorphismus von V , und sei

$$\chi_\varphi(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$$

das charakteristische Polynom von φ .

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom des adjungierten Endomorphismus φ^* .

- (2) Sei (V, β) ein endlichdimensionaler unitärer Raum. Sei φ ein normaler Endomorphismus von V . Zeigen Sie:

(a) Jeder Vektor $\underline{v} \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ mit $\underline{u} \in \varphi(V)$ und $\underline{w} \in \text{Kern } \varphi$. Dabei gilt $\underline{u} \perp \underline{w}$.

(b) Es gilt $\varphi(V) = \varphi^2(V)$.

- (3) Sei (V, β) ein unitärer Raum mit $\dim V = n$. Sei U ein Unterraum von V und sei π_U die orthogonale Projektion von V auf U .

Beweisen Sie: $\pi_U = \pi_U^*$.

- (4) Für $A, B \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{C})$ setzen wir $\beta(A, B) = \text{Spur}(A \cdot B^*)$. Zeigen Sie:

(a) $(\mathfrak{M}(n; \mathbb{C}), \beta)$ ist ein unitärer Raum.

(b) Sind $A, B \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{C})$ normale Matrizen und gilt $A \cdot B = \mathbf{0}$, so folgt $B \cdot A = \mathbf{0}$.