

Lineare Algebra II SoSe 2010 — Lösung Blatt 4

(1) (V, β) endlichdimensionaler unitärer Raum,
 φ, ψ Endomorphismen von V .

(a) Beh.: $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

Beweis: Für alle $\underline{v}, \underline{w} \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}\beta((\varphi \circ \psi)(\underline{v}), \underline{w}) &= \beta(\varphi(\psi(\underline{v})), \underline{w}) \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Def. } \varphi^*}}{=} \beta(\psi(\underline{v}), \varphi^*(\underline{w})) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Def. } \psi^*}}{=} \beta(\underline{v}, \psi^*(\varphi^*(\underline{w}))) \\ &= \beta(\underline{v}, (\psi^* \circ \varphi^*)(\underline{w})).\end{aligned}$$

Da $\psi^* \circ \varphi^*$ ein Endomorphismus von V ist und der Endomorphismus $(\varphi \circ \psi)^*$ bereits eindeutig durch diese Eigenschaft charakterisiert wird ($\rightarrow$ VL), folgt $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

(b) Seien φ und ψ selbstadjungiert.

Beh.: $\varphi \circ \psi$ selbstadjungiert $\Leftrightarrow \varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": $\varphi \circ \psi$ selbstadjungiert

$$\Rightarrow \varphi \circ \psi = (\varphi \circ \psi)^* \stackrel{(\text{a})}{=} \psi^* \circ \varphi^* \stackrel{\substack{\text{Vor.} \\ \downarrow}}{=} \psi \circ \varphi.$$

" $\Leftarrow$ ": $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$

$$\Rightarrow (\varphi \circ \psi)^* \stackrel{(\text{a})}{=} \psi^* \circ \varphi^* \stackrel{\substack{\text{Vor.} \\ \downarrow}}{=} \psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$$

$\Rightarrow \varphi \circ \psi$ selbstadjungiert.

(2) (V, β) endlichdimensionaler unitärer Raum,

φ Endomorphismus von V .

Beh.: φ selbstadjungiert $\Leftrightarrow \forall \underline{v} \in V: \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) \in \mathbb{R}$.

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Sei φ selbstadjungiert. Dann gilt für alle $\underline{v} \in V$:

$$\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) \stackrel{\varphi \text{ selbstadj.}}{=} \beta(\underline{v}, \varphi(\underline{v})) \stackrel{\beta \text{ hermitesch}}{=} \overline{\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v})}$$

$$\Rightarrow \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) \in \mathbb{R}.$$

" $\Leftarrow$ ": Gelte $\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) \in \mathbb{R}$ für alle $\underline{v} \in V$.

Seien $\underline{v}, \underline{w} \in V$ beliebig.

Zunächst gilt für alle $\underline{x} \in V$:

$$\beta(\varphi(\underline{x}), \underline{x}) \stackrel{\text{Vor.}}{=} \overline{\beta(\varphi(\underline{x}), \underline{x})} \stackrel{\beta \text{ hermitesch}}{=} \beta(\underline{x}, \varphi(\underline{x})). \quad (*)$$

Angewandt auf $\underline{x} = \underline{v}$, $\underline{x} = \underline{w}$ und $\underline{x} = \underline{v} + \underline{w}$ bekommt man:

$$* \beta(\varphi(\underline{v} + \underline{w}), \underline{v} + \underline{w}) \stackrel{\varphi \text{ lin.}, \beta \text{ sesquilin.}}{=} \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) + \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w})$$

$$+ \beta(\varphi(\underline{w}), \underline{v}) + \beta(\varphi(\underline{w}), \underline{w})$$

$$\stackrel{(*)}{=} \beta(\underline{v}, \varphi(\underline{v})) + \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w}) + \beta(\varphi(\underline{w}), \underline{v}) + \beta(\underline{w}, \varphi(\underline{w}))$$

$$* \beta(\varphi(\underline{v} + \underline{w}), \underline{v} + \underline{w}) \stackrel{(*)}{=} \beta(\underline{v} + \underline{w}, \varphi(\underline{v} + \underline{w}))$$

$$\stackrel{\varphi \text{ lin.}, \beta \text{ sesquilin.}}{=} \beta(\underline{v}, \varphi(\underline{v})) + \beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w})) + \beta(\underline{w}, \varphi(\underline{v})) + \beta(\underline{w}, \varphi(\underline{w}))$$

Zusammen folgt:

$$\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w}) + \beta(\varphi(\underline{w}), \underline{v}) = \beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w})) + \beta(\underline{w}, \varphi(\underline{v}))$$

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow & \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w}) - \overline{\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w})} & = \beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w})) - \overline{\beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w}))} \\ \uparrow & \parallel & \parallel \\ \beta \text{ hermitesch} & & \beta \text{ lin.} \\ & 2i \operatorname{Im}(\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w})) & 2i \operatorname{Im}(\beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w}))) \end{array}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w})) = \operatorname{Im}(\beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w}))).$$

Durch Ersetzen $\underline{w} \rightsquigarrow i\underline{w}$ bekommt man:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Im}(\beta(\varphi(\underline{v}), i\underline{w})) & = & \operatorname{Im}(\beta(\underline{v}, \varphi(i\underline{w}))) \\ \parallel \leftarrow \beta \text{ sesquilin.} & & \parallel \leftarrow \varphi \text{ lin.} \\ & & \beta \text{ sesquilin.} \\ \operatorname{Im}(-i \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w})) & & \operatorname{Im}(-i \beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w}))) \\ \parallel & & \parallel \\ -\operatorname{Re}(\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w})) & & -\operatorname{Re}(\beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w}))) \end{array}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w})) = \operatorname{Re}(\beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w}))).$$

Daraus folgt die Behauptung:

$$\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w}) = \beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w}))$$

für alle $\underline{v}, \underline{w} \in V$, d.h. φ ist selbstadjungiert.

(3) (V, β) endlichdimensionaler unitärer Raum.

(i) Sei φ antiselbstadjungiert.

Beh.: $\forall \underline{v} \in V: \operatorname{Re}(\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v})) = 0.$

Beweis: Für alle $\underline{v} \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) &\stackrel{\text{Def. } \varphi^*}{=} \beta(\underline{v}, \varphi^*(\underline{v})) \stackrel{\text{Vor.}}{=} \beta(\underline{v}, -\varphi(\underline{v})) \\ &\stackrel{\beta \text{ hermitesch}}{=} -\beta(\underline{v}, \varphi(\underline{v})) \stackrel{\downarrow}{=} -\overline{\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) + \overline{\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v})} = 2 \operatorname{Re}(\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}))$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v})) = 0.$$

(ii) Sei φ antiselbstadjungiert, λ Eigenwert von φ .

Beh.: $\operatorname{Re} \lambda = 0.$

Beweis: λ EW von $\varphi \Rightarrow \exists \underline{v} \in V \setminus \{0\}: \varphi(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$

Mit (i) folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{Re}(\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v})) = \operatorname{Re}(\beta(\lambda \underline{v}, \underline{v})) \\ &= \operatorname{Re}(\lambda \underbrace{\beta(\underline{v}, \underline{v})}_{= \|\underline{v}\|^2 \in \mathbb{R}}) = \operatorname{Re}(\lambda) \cdot \underbrace{\|\underline{v}\|^2}_{\neq 0, \text{ da } \underline{v} \neq \underline{0}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \lambda = 0.$$

(iii) Sei jetzt (V, β) euklidisch.

Beh.: φ antiselbstadjungiert $\Leftrightarrow \forall \underline{v} \in V: \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) = 0$

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Wie (i): Für alle $\underline{v} \in V$ gilt:

$$\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) \stackrel{\text{Def. } \varphi^*}{=} \beta(\underline{v}, \varphi^*(\underline{v})) \stackrel{\text{Vol.}}{=} \beta(\underline{v}, -\varphi(\underline{v}))$$

$$= -\beta(\underline{v}, \varphi(\underline{v})) \stackrel{\beta \text{ symm.}}{=} -\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v})$$

$$\Rightarrow \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) = 0.$$

" $\Leftarrow$ ": Gelte $\forall \underline{v} \in V: \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) = 0$.

Dann gilt für alle $\underline{v}, \underline{w} \in V$:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{Vol.}}{=} \beta(\varphi(\underline{v} + \underline{w}), \underline{v} + \underline{w}) \stackrel{\varphi \text{ lin., } \beta \text{ bilin.}}{=} \underbrace{\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v})}_{= 0 \text{ u. Vor.}} + \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w}) \\ &\quad + \underbrace{\beta(\varphi(\underline{w}), \underline{v})}_{\stackrel{\beta \text{ symm.}}{=} \beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w}))} + \underbrace{\beta(\varphi(\underline{w}), \underline{w})}_{= 0 \text{ u. Vor.}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{w}) = -\beta(\underline{v}, \varphi(\underline{w})) = \beta(\underline{v}, -\varphi(\underline{w})).$$

Daraus folgt $\varphi^* = -\varphi$, d.h. φ ist antiselbstadjungiert.

(4) (V, β) endlichdimensionaler unitärer Raum, φ selbstadjungierter Endomorphismus von V

($\Rightarrow$ alle EW von φ sind reell), s.d. alle Eigenwerte von φ positiv sind.

Beh.: $\{\underline{v} \in V : \underline{v} \text{ EV von } \varphi\} = \{\underline{v} \in V : \underline{v} \text{ EV von } \varphi^2\}$
und $\{\lambda^2 : \lambda \in \mathbb{R} \text{ EW von } \varphi\} = \{\mu \in \mathbb{R} : \mu \text{ EW von } \varphi^2\}$.

Beweis. jeweils „ $\subset$ “:

Sei $\underline{v} \in V$ EV von φ zum EW $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \varphi^2(\underline{v}) = \varphi(\varphi(\underline{v})) = \varphi(\lambda \underline{v}) = \lambda \varphi(\underline{v}) = \lambda^2 \underline{v}$$

mit $\underline{v} \neq \underline{0}$, d.h. $\underline{v}$ ist EV von φ^2 zum EW λ^2 .

jeweils „ $\supset$ “:

Sei $\underline{v} \in V$ EV von φ^2 zum EW $\mu \in \mathbb{R}$,

d.h. $\underline{v} \neq \underline{0}$ und $\varphi^2(\underline{v}) = \mu \underline{v}$.

φ selbstadjungiert $\Rightarrow \exists$ Basis von V aus EV von φ ,

d.h. $\exists$ Basis $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ von V mit $\varphi(\underline{b}_i) = \lambda_i \underline{b}_i$,

wobei $\lambda_i > 0$ die Eigenwerte von φ sind.

Schreibe $\underline{v} = \sum_{i=1}^n v_i \underline{b}_i$ mit $v_i \in \mathbb{C}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu v_i \underline{b}_i &= \mu \sum_{i=1}^n v_i \underline{b}_i = \mu \underline{v} = \varphi^2(\underline{v}) \\ &= \varphi^2\left(\sum_{i=1}^n v_i \underline{b}_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi^2(\underline{b}_i) \stackrel{\text{so.}}{=} \sum_{i=1}^n v_i \lambda_i^2 \underline{b}_i \end{aligned}$$

Da $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n$ l.u. sind, folgt:

$$\forall i=1, \dots, n: \mu v_i = \lambda_i^2 v_i$$

$$\Rightarrow \forall i=1, \dots, n: v_i = 0 \text{ oder } \mu = \lambda_i^2$$

Wegen $\underline{v} \neq \underline{0}$ ist $v_i \neq 0$ für mindestens ein i ,
d.h. $\mu = \lambda_i^2$ ist das Quadrat eines EW von φ

Ferner gilt $\mu > 0$ und

$$\forall i=1, \dots, n: v_i = 0 \text{ oder } \sqrt{\mu} = \lambda_i$$

$$\Rightarrow \forall i=1, \dots, n: \sqrt{\mu} v_i = \lambda_i v_i$$

$$\Rightarrow \varphi(\underline{v}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n v_i \underline{b}_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i \varphi(\underline{b}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \underline{b}_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu} v_i \underline{b}_i$$

$$= \sqrt{\mu} \sum_{i=1}^n v_i \underline{b}_i = \sqrt{\mu} \underline{v}$$

d.h. $\underline{v}$ ist EV von φ .