

5. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Abgabe: Do., 20.05.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

- (1) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie eine Matrix $S \in \mathfrak{M}(3; \mathbb{R})$, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

- (2) Sei
- φ
- der von

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

induzierte Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$.

- (i) Zeigen Sie: φ ist normal.
 - (ii) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich derer φ eine Koordinatenmatrix wie in Satz 11.16 hat.
- (3) Sei (V, β) ein unitärer (bzw. Euklidischer) Vektorraum der Dimension n . Sei φ ein Endomorphismus von V . Zeigen Sie:
- (i) φ ist antiselbstadjungiert genau dann, wenn die Koordinatenmatrix A von φ bezüglich einer Orthonormalbasis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ von V der Beziehung $A^* = -A$ genügt.
 - (ii) Ist φ antiselbstadjungiert, und ist V unitär, so gibt es eine Orthonormalbasis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ von V , welche aus Eigenvektoren von φ besteht.
Ist $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ die Koordinatenmatrix von φ bezüglich $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$, so gilt für $i = 1, \dots, n$: $\operatorname{Re} a_{ii} = 0$.
 - (iii) Sei A eine Matrix in $\mathfrak{M}(n; \mathbb{C})$ mit $A^* = -A$, so gibt es eine nichtsinguläre Matrix $S \in \mathfrak{M}(n; \mathbb{C})$, so dass gilt:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$. (Vgl. Aufgabe (3), Blatt 4.)

bitte wenden!

- (4) Sei (V, β) ein unitärer Vektorraum mit $\dim V = n$. Sei φ ein Endomorphismus von V . Dann besitzt φ eine eindeutige Darstellung der Form

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

mit Endomorphismen φ_1 und φ_2 , so dass φ_1 selbstadjungiert und φ_2 anti-selbstadjungiert sind.

(Anleitung: $\varphi_1 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*)$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi^*)$.) (Vgl. Aufgabe (3), Blatt 4.)