

6. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Abgabe: Do., 27.05.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

(1) Sei

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{a}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die geordnete Basis des unitären Raumes $\mathbb{C}^5$ mit dem kanonischen Skalarprodukt. Bestimmen Sie zu $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_5$ die Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^5$ nach dem Schmidtschen Verfahren.

(2) Sei (V, β) ein euklidischer Vektorraum. Seien $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ linear unabhängige Vektoren in V . Dann heißt

$$P = \{ \underline{w} \mid \underline{w} = w_1 \underline{v}_1 + \dots + w_m \underline{v}_m, \ 0 \leq w_\mu \leq 1 \ (\mu = 1, \dots, m) \}$$

das von $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ aufgespannte *Parallelepiped*. Sei

$$U = \langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle$$

der von $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m$ erzeugte Unterraum von V , und sei $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$ eine Orthonormalbasis von U . Für $\mu = 1, \dots, m$ gelte

$$\underline{v}_\mu = \sum_{\nu=1}^m y_{\mu\nu} \underline{e}_\nu \quad (*)$$

mit $y_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq \mu, \nu \leq m$). Sei

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mm} \end{pmatrix}.$$

Dann heißt $D := |\text{Det } Y|$ *Volumen* von P . Zeigen Sie:

(i)

$$\left(\text{Det} \begin{pmatrix} \beta(\underline{v}_1, \underline{e}_1) & \cdots & \beta(\underline{v}_1, \underline{e}_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta(\underline{v}_m, \underline{e}_1) & \cdots & \beta(\underline{v}_m, \underline{e}_m) \end{pmatrix} \right)^2 = \text{Det} \begin{pmatrix} \beta(\underline{v}_1, \underline{v}_1) & \cdots & \beta(\underline{v}_1, \underline{v}_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta(\underline{v}_m, \underline{v}_1) & \cdots & \beta(\underline{v}_m, \underline{v}_m) \end{pmatrix}.$$

bitte wenden!

- (ii) Aussage (i) impliziert: Das Volumen D des Parallelepipeds P hängt nicht von der speziellen Orthonormalbasis $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_m$ ab. Die zweite Determinante in (i) ist das Quadrat des Volumens.

Anleitung: In (*) gilt $y_{\mu\nu} = \beta(\underline{v}_\mu, \underline{v}_\nu)$.

- (iii) Berechnen Sie im $\mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen Skalarprodukt das Volumen des von

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erzeugten Parallelepipeds.

- (3) Bestimmen Sie zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix B und eine symmetrische Matrix C , so dass gilt:

$$A = B \cdot C.$$

(Anleitung: Der Beweis von Satz 12.10 ist konstruktiv.)