

Linal 2, Zettel 7

Lutz Pohlabein

June 10, 2010

1 Aufgabe 1

(V, β) euklidisch, $\varphi \in \text{End}(V)$ orthogonal, $\dim V = n$. Zu zeigen:

$$|\text{tr } \varphi| \leq n$$

und $|\text{tr } \varphi| = n$ falls $\varphi \in \{\text{id}, -\text{id}\}$.

Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis von V und A die Matrix von φ bezüglich dieser Basis. Dann gilt:

$$A \cdot A^T = A \cdot \bar{A}^T = E_n$$

Also ist $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$ unitär, insbesondere normal, und es existiert also eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren, sodass A bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt hat, also:

$$\exists S \in \text{U}(n) : \quad S^* A S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $|\lambda_i| = 1 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$. ($\text{U}(n) \subset \text{GL}(n, \mathbb{C})$ ist die unitäre Gruppe.)

Nun gilt:

$$|\text{tr } \varphi| = |\text{tr } A| = |\text{tr}(S^* A S)| = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| = n$$

Beim " $\leq$ " wurde endlich oft die Dreiecksungleichung angewandt.

Da nun offenbar $(\text{tr } \varphi) \in \mathbb{R}$ gilt, wird $|\text{tr } \varphi|$ genau dann maximal, wenn alle Eigenwerte maximalen Realteil und gleiches Vorzeichen haben, also offensichtlich entweder $\lambda_i = 1$ oder $\lambda_i = -1$ für alle i . Dies ist natürlich äquivalent zu $\varphi \in \{\text{id}, -\text{id}\}$.

2 Aufgabe 2

2.1 a

(V, β) unitärer Raum, $\dim V = n$, $U \subset V$ ein Unterraum und $W = U^\perp$ das orthogonale Komplement von U in V . Dann gilt: $V = U \oplus W$.

Zu zeigen: die Abbildung $\varphi : V \rightarrow V : v = u + w \mapsto u - w$, wobei $v = u + w$ die eindeutige Zerlegung von v bezüglich U und W ist, ist ein selbstadjungierter unitärer Endomorphismus.

Offenbar ist φ linear, denn es ist ja $\varphi|_U = \text{id}_U$ und $\varphi|_W = -\text{id}_W$.

Seien nun $v, v' \in V$ beliebig, mit $v = u + w$, $v' = u' + w'$, $u, u' \in U$, $w, w' \in W$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\beta(u + w, u' + w') &= \beta(u, u') + \beta(w, w') + \beta(u, w') + \beta(w, u') \\ &= \beta(u, u') + \beta(w, w') - \beta(u, w') - \beta(w, u') \\ &= \beta(u - w, u' - w')\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\beta(v, v') = \beta(\varphi(v), \varphi(v'))$$

(Die "Diagonalterme" $(\beta(u, w'), \beta(w, u'))$ sind jeweils 0 und man darf daher deren Vorzeichen ändern.)

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\beta(u - w, u' + w') &= \beta(u, u') + \beta(-w, w') \\ &= \beta(u, u') + \beta(w, -w') \\ &= \beta(u + w, u' - w')\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\beta(\varphi(v), v') = \beta(v, \varphi(v'))$$

(Die Diagonalterme hab ich diesmal einfach komplett weggelassen.)

2.2 b

Es sei $(\mathbb{R}^3, \beta)$ der $\mathbb{R}^3$ mit kanonischem Skalarprodukt und U der von $a = (1, 0, 1)^T$ aufgespannte Unterraum. Es ist die Matrix von der Abbildung φ aus Aufgabenteil a) bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ zu finden.

Mit dem Gram-Schmidt Verfahren ergänzt man a zu einer orthonormalen Basis e_1, e_2, e_3 von $\mathbb{R}^3$ durch:

$$\begin{aligned}e_1 &= \frac{a}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^T \\ e_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T\end{aligned}$$

$$e_3 = (0, 1, 0)^T$$

Sei S die orthogonale Basistransformation von der kanonischen Basis zu e_1, e_2, e_3 , also:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ist A die Matrix der Abbildung bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$, so gilt nun:

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &\iff \\ A &= S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} S^{-1} \end{aligned}$$

Man rechnet direkt nach:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3 Aufgabe 3

(V, β) endlichdimensionaler unitärer Raum und $\varphi \in \text{End}(V)$ selbstadjungiert und unitär. Zu zeigen: es gibt einen Unterraum $U \subset V$, sodass φ bezüglich U die in Aufgabe 2 beschriebene Abbildung ist.

Es ist φ selbstadjungiert, also sind alle Eigenwerte reell. Weiter ist φ unitär, also haben alle Eigenwerte Betrag 1, also sind alle Eigenwerte in $\{1, -1\}$. Weiter ist φ insbesondere normal und es existiert eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von φ . Sei $e_1, \dots, e_n$ diese Basis. Durch umsordieren kann man ohne Einschränkung annehmen, dass alle $e_1, \dots, e_r$ Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind und $e_{r+1}, \dots, e_n$ Eigenvektoren zum Eigenwert -1 sind.

Dann gilt offensichtlich für $U := \text{span}(e_1, \dots, e_r)$, $W := \text{span}(e_{r+1}, \dots, e_n)$:

$$W = U^\perp$$

(dies folgt sofort daraus, dass $e_1, \dots, e_n$ eine orthogonale Basis ist) und $\varphi|_U = \text{id}_U$ sowie $\varphi|_W = -\text{id}_W$ wie in Aufgabe 2.

4 Aufgabe 4

Man sieht leicht, dass $(1, 0, 0)^T$, $a = (1, 1, 1)^T$ und $b = (1, 1, -2)^T$ linear unabhängig sind. Mit dieser Basis des $\mathbb{R}^3$ kann man mittels des Gram-Schmidt

Verfahrens eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ angeben:

$$\begin{aligned}
 B &:= (e_1, e_2, e_3) \\
 &= \left(\frac{a}{|a|}, \frac{b}{|b|}, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T \right) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T, \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^T, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^T \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left((\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})^T, (1, 1, -2)^T, (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)^T \right)
 \end{aligned}$$

(a und b sind bereits orthogonal, deswegen mussten sie nur normalisiert werden). Es sei S die Transformationsmatrix von der kanonischen Basis zu B , also:

$$S := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Da die Spaltenvektoren von S eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden, ist S orthogonal, also $S^{-1} = S^T$.

Nun sei für ein $\vartheta \in [0, 2\pi)$:

$$D_\vartheta := \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Wir wissen: eingeschränkt auf U und bezüglich der Basis e_1, e_2 hat unsere Drehung die Matrix D_ϑ .

Also gilt für die Matrix A_ϑ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
 S^{-1}A_\vartheta S &= \begin{bmatrix} D_\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\iff \\
 A_\vartheta &= S \begin{bmatrix} D_\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S^{-1}
 \end{aligned}$$

Dies rechnet man einfach nach:

$$A_\vartheta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) + 1 & \cos(\vartheta) - 1 & \sqrt{2} \sin \vartheta \\ \cos(\vartheta) - 1 & \cos(\vartheta) + 1 & \sqrt{2} \sin \vartheta \\ -\sqrt{2} \sin \vartheta & -\sqrt{2} \sin \vartheta & 2 \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich beispielsweise:

$$A_{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Damit gilt:

$$A_{\frac{\pi}{2}} e_1 = e_2$$

sowie

$$A_{\frac{\pi}{2}}^3 e_2 = A_{\frac{3\pi}{2}} e_2 = e_1$$

und generell:

$$A_{\vartheta} e_3 = e_3 \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi)$$

wie man erwarten würde.