Sommersemester 2010

7. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Abgabe: Fr., 04.06.2010, bis 14 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

(1) Sei (V, β) ein n-dimensionaler euklidischer Raum. Sei φ ein orthogonaler Endomorphismus von V. Zeigen Sie:

(i) $|\operatorname{Spur}\varphi| \leqslant n$.

(ii) $|\operatorname{Spur}\varphi| = n$ genau dann, wenn $\varphi = \mathrm{id}_V$ oder $\varphi = -\mathrm{id}_V$.

(2) Sei (V, β) ein n-dimensionaler unitärer Raum. Sei U ein Unterraum von V. Dann gilt $V = U \oplus U^\perp$, d. h. jeder Vektor $\underline{\underline{v}} \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form $\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{w}}$ mit $\underline{\underline{u}} \in U$, $\underline{\underline{w}} \in U^\perp$. Sei $\varphi : V \to V$ die durch

$$\varphi(\underline{\underline{v}}) = \varphi(\underline{\underline{u}} + \underline{\underline{w}}) = \underline{\underline{u}} - \underline{\underline{w}}$$

definierte Abbildung. Zeigen Sie:

(i) φ ist ein unitärer, selbstadjungierter Endomorphismus von V.

(ii) Sei speziell V der $\mathbb{R}^3$ und β das kanonische Skalarprodukt. Sei U der von $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ aufgespannte Unterraum. Bestimmen Sie die Matrix von φ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

(3) Sei (V, β) ein endlichdimensionaler unitärer Raum. Sei φ ein selbstadjungierter unitärer Endomorphismus von V.

Zeigen Sie: Es gibt einen Unterraum U von V, so dass φ die in Aufgabe (2) zu U definierte Abbildung ist.

(4) Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt sei U die von

$$\underline{\underline{a}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

aufgespannte Ebene. Sei φ die Drehung des $\mathbb{R}^3$ um den Winkel ϑ um die auf U senkrecht stehende Ursprungsgerade.

Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix von φ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$.

(Anleitung: Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\underline{\underline{a}}_1, \underline{\underline{a}}_2, \underline{\underline{a}}_3$ von $\mathbb{R}^3$, so dass $\underline{\underline{a}}_1, \underline{\underline{a}}_2$ die Ebene U aufspannen, und beschreiben Sie zunächst φ mit $\underline{\underline{a}}_1, \underline{\underline{a}}_2, \underline{\underline{a}}_3$.)