

8. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“

Abgabe: Do., 10.06.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

- (1) Untersuchen Sie, bei welchen der folgenden Beispiele es sich um Äquivalenzrelationen handelt. Geben Sie ggf. ein vollständiges Repräsentantensystem für die Menge der Äquivalenzklassen an:

- (i) Sei M eine nichtleere Menge. Für Elemente $x, y \in M$ gelte $x R y$ genau dann, wenn $x = y$.
- (ii) Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Für Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gelte $x R y$ genau dann, wenn $x < y$.
- (iii) Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelte $x R y$ genau dann, wenn $x \leq y$.
- (iv) Sei $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen. Sei n eine feste natürliche Zahl. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ gelte $x R y$ genau dann, wenn n ein Teiler von $x - y$ ist (d. h. $\exists z \in \mathbb{Z}$ mit $n \cdot z = x - y$).

- (2) Seien M und N nichtleere Mengen und sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Auf M wird durch

$$m_1 R m_2 \iff f(m_1) = f(m_2)$$

eine Äquivalenzrelation definiert. f induziert eine Bijektion zwischen M/R und $f(M)$.

Zeigen Sie weiter: Ist M eine nichtleere Menge und ist R eine Äquivalenzrelation auf M , so gibt es eine Menge N und eine Abbildung $f : M \rightarrow N$, so dass gilt:

$$m_1 R m_2 \text{ genau dann, wenn } f(m_1) = f(m_2).$$

(Mit anderen Worten: Jede Äquivalenzrelation auf M kann durch eine Abbildung wie im ersten Teil definiert werden.)

bitte wenden!

- (3) Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über dem Körper K . Sei φ ein Endomorphismus von V . Für einen Vektor $\underline{v} \in V$ heißt ein Polynom $p(X) \in K[X] \setminus \{0\}$ φ -Annihilationspolynom von $\underline{v}$, falls gilt: $p(\varphi)(\underline{v}) = \underline{0}$. Das φ -Annihilationspolynom von $\underline{v}$ mit minimalem Grad und mit führendem Koeffizienten 1 heißt φ -Minimalpolynom von $\underline{v}$. Zeigen Sie:

- (i) Sei $\underline{v} \in V$ und sei $p_{\underline{v}}(X)$ das φ -Minimalpolynom von $\underline{v}$. Dann gilt: $p_{\underline{v}}(X)$ ist ein Teiler des Minimalpolynoms $\mu_{\varphi}(X)$ von φ .

(Anleitung: Divisionsalgorithmus für Polynome.)

- (ii) Der Grad von $p_{\underline{v}}(X)$ (vgl. (i)) stimmt mit der Dimension des Unterraums

$$U(\varphi, \underline{v}) := \langle \underline{v}, \varphi(\underline{v}), \varphi^2(\underline{v}), \dots \rangle$$

überein.

- (iii) Hat $p_{\underline{v}}(X)$ den Grad k , so bilden

$$\underline{v}, \varphi(\underline{v}), \dots, \varphi^{k-1}(\underline{v})$$

eine Basis von $U(\varphi, \underline{v})$.

- (iv) $\varphi|_{U(\varphi, \underline{v})}$ ist ein Endomorphismus von $U(\varphi, \underline{v})$. $p_{\underline{v}}(X)$ stimmt mit dem Minimalpolynom des Endomorphismus

$$\varphi|_{U(\varphi, \underline{v})} : U(\varphi, \underline{v}) \longrightarrow U(\varphi, \underline{v})$$

überein.