

**9. Übungsblatt zur Vorlesung „Lineare Algebra II“**

Abgabe: Do., 17.06.2010, bis 17 Uhr, Lahnberge, Briefkästen Ebene D6

- (1) Sei  $U$  der von  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  erzeugte Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ .
- (i) Geben Sie ein vollständiges Repräsentantensystem in  $\mathbb{R}^3$  für die Elemente von  $\mathbb{R}^3/U$  an.
  - (ii) Bestimmen Sie eine Basis von  $\mathbb{R}^3/U$ .
  - (iii) Behandeln Sie (i) und (ii) für den von  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  erzeugten Unterraum  $U$ .

- (2) Seien  $V$  und  $V'$  Vektorräume über dem Körper  $K$ . Seien  $U$  bzw.  $U'$  Unterräume von  $V$  bzw. von  $V'$ . Sei  $\varphi : V \rightarrow V'$  eine lineare Abbildung. Seien  $\pi_U : V \rightarrow V/U$  und  $\pi_{U'} : V' \rightarrow V'/U'$  die kanonischen Projektionen. Zeigen Sie:

Genau dann gibt es eine lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi} : V/U \longrightarrow V'/U',$$

so dass gilt:  $\tilde{\varphi} \circ \pi_U = \pi_{U'} \circ \varphi$ , wenn  $\varphi(U) \subset U'$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi_U} & V/U \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \tilde{\varphi} \\ V' & \xrightarrow{\pi_{U'}} & V'/U' \end{array}$$

Anleitung: Definieren Sie  $\tilde{\varphi}$  durch die Zuordnung

$$\underline{v} \bmod U \longmapsto \varphi(\underline{v}) \bmod U'.$$

Zeigen Sie: Diese Zuordnung ist eine Abbildung, wenn  $\varphi(U) \subset U'$ .

- (3) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 34 & 18 \\ -14 & -19 & -10 \\ -4 & -6 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(3; \mathbb{R}).$$

- (i) Zeigen Sie:  $A$  zerfällt über  $\mathbb{R}$ .
- (ii) Bestimmen Sie eine zu  $A$  ähnliche Matrix nach Satz 13.21.

- (4) Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$  mit  $\dim V = n$ . Sei  $\varphi$  ein Endomorphismus von  $V$  mit  $\text{Rang } \varphi = 1$ .

Zeigen Sie: Entweder ist  $\varphi$  diagonalisierbar oder  $\varphi$  ist nilpotent.