

Alternativklausur zur Vorlesung LINEARE ALGEBRA II
Donnerstag, 14.10.2010, 9.30 – 12.00 Uhr, HS A, HG Chemie, Lahnberge

☐ Frau ☐ Herr

Name:

Muster —

Vorname:

Matrikelnummer:

Lösung

Studiengang:

- Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt aus und versehen Sie **alle** Blätter mit Ihrem Namen!
- Bearbeiten Sie die Aufgaben auf den ausgegebenen Blättern. Es befinden sich noch leere Blätter bei der Aufsicht, falls der Platz unter der Aufgabenstellung, auf der Rückseite des Aufgabenblattes und auf den Zusatzblättern nicht ausreichen sollte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

VIEL ERFOLG!

A1	A2	A3	A4	A5	Σ
3	3	3	3	3	15

Name:

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform für die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}(4; \mathbb{R}).$$

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_A(x) = \det(xE_4 - A) =$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & x-1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{\underline{(x-1)^3 (x-2)}}.$$

↑
obere
 Δ -Matrix

Minimalpolynom:

$\mu_A(x) \mid \chi_A(x)$ mit denselben Nullstellen

$$\Rightarrow \mu_A(x) = (x-1)^k (x-2), \quad 1 \leq k \leq 3$$

$$\bullet (A - 1 \cdot E_4)(A - 2E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$\cdot (A - 1 \cdot E_4)^2 (A - 2 E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$\cdot (A - 1 \cdot E_4)^3 (A - 2 E_4) = 0.$$

$$\Rightarrow \mu_A(x) = \underline{(x-1)^3 (x-2)}.$$

Jordanische Normalform:

$$\chi_A(x) = (x-1)^3 (x-2)$$

$\Rightarrow A$ hat den Eigenwert 1 mit algebraischer Vielfachheit 3
und den Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 1.

$$\mu_A(x) = (x-1)^3 (x-2)$$

$\rightarrow$ Der größte Jordan-Block zum Eigenwert 1
ist ein (3×3) -Block und der größte Jordan-Block
zum Eigenwert 2 ist ein (1×1) -Block.

Folglich ist die Jordanische Normalform von A gleich

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (3 \times 3) - \text{Block}, \\ \\ \\ (1 \times 1) - \text{Block}. \end{array}$$

Name:

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(3; \mathbb{C}).$$

Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $U \in \mathcal{M}(3; \mathbb{C})$, so dass U^*AU eine Diagonalmatrix ist.

$$\chi_A(x) = \det(xE_3 - A) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{\text{Entw. 2.} \\ \text{Zeile/Spalte}}}{=} (x-1) \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = (x-1)(x^2 + 1)$$

$$= (x-1)(x-i)(x+i).$$

$$\text{Eigenwerte: } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i.$$

Eigenräume:

$$\begin{aligned} \bullet V(1, A) &= \text{Kern}(1 \cdot E_3 - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ON-Basis}} \right\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet V(i, A) &= \text{Kern}(i \cdot E_3 - A) = \text{Kern} \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & i-1 & 0 \\ -1 & 0 & i \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ON-Basis}} \right\rangle. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad V(-i, A) \stackrel{\uparrow}{=} \overline{V(i, A)} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$A \in M(3; \mathbb{R})$

Wegen $A \cdot A^* = A^* \cdot A$ ($= E_3$) ist A normal, d.h. die Eigenräume bilden eine orthogonale direkte Summe.

Folglich ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine ON-Basis von $\mathbb{C}^3$ und

$$U := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3; \mathbb{C})$$

eine unitäre Matrix. Es gilt

$$U^* A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

d.h. $U^* A U$ ist eine Diagonalmatrix.

Name:

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{M}(n; K)$. A habe n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$.

Zeigen Sie: A ist nichtsingulär.

A hat n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

$\Rightarrow \exists S \in \mathcal{M}(n; K)$ invertierbar mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(S)^{-1} \det(A) \det(S)$$

$$= \det(S^{-1}AS) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \neq 0, \text{ da } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}.$$

Damit ist A nichtsingulär.

Name:

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei (V, β) ein unitärer Vektorraum und $\varphi : V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus.

Zeigen Sie: Für alle $\underline{v} \in V$ gilt

$$\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) \in \mathbb{R}.$$

Für alle $\underline{v} \in V$ gilt:

$$\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Def } \varphi^*}}{=} \beta(\underline{v}, \varphi^*(\underline{v})) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Vgl.: } \varphi = \varphi^*}}{=} \beta(\underline{v}, \varphi(\underline{v}))$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \beta \text{ hermitesch}}}{=} \overline{\beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v})}$$

$$\Rightarrow \beta(\varphi(\underline{v}), \underline{v}) \in \mathbb{R}.$$

Name:

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K . Sei φ ein Endomorphismus von V .

Zeigen Sie: Ist V φ^2 -zyklisch, so ist V auch φ -zyklisch.

Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort.

V ist φ^2 -zyklisch

$$\stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} \exists \underline{v} \in V \setminus \{0\} : V = \langle \underline{v}, \varphi^2(\underline{v}), (\varphi^2)^2(\underline{v}), \dots \rangle$$

$$= \langle \underline{v}, \varphi^2(\underline{v}), \varphi^4(\underline{v}), \dots \rangle$$

$$\subset \langle \underline{v}, \varphi(\underline{v}), \varphi^2(\underline{v}), \dots \rangle \subset V$$

$$\Rightarrow V = \langle \underline{v}, \varphi(\underline{v}), \varphi^2(\underline{v}), \dots \rangle \Rightarrow V \text{ ist } \varphi\text{-zyklisch.}$$

Beh.: V ist φ -zyklisch $\stackrel{\text{i.A.}}{\nRightarrow} V$ ist φ^2 -zyklisch.

Beweis: Wähle $V := K^2$, $\varphi(\underline{v}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{v}$.

Dann gilt:

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \dots \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right\rangle = V$$

$$\Rightarrow V \text{ ist } \varphi\text{-zyklisch.}$$

Aber: Für alle $\underline{v} \in V \setminus \{0\}$:

$$\langle \underline{v}, \varphi^2(\underline{v}), (\varphi^2)^2(\underline{v}), \dots \rangle = \underbrace{\langle \underline{v}, \underline{0}, \underline{0}, \dots \rangle}_{\text{Dim} = 1} \neq \underbrace{V}_{\text{Dim} = 2}$$

$$\Rightarrow V \text{ ist nicht } \varphi^2\text{-zyklisch.}$$