Stochastische Analysis

SS10

von

Steffen Dereich

Fachbereich Mathematik und Informatik
Philipps-Universität Marburg

Version vom 31. August 2010

Inhaltsverzeichnis

Notationen

$\mathcal{E}$		uniform beschränkte elementare Prozesse; siehe Definition 1.2
$\mathcal{M}$	$(\mathcal{M}_0)$	stetige Martingale (mit Startwert 0); siehe Definition 2.11
$\mathcal{M}^{\mathrm{loc}}$	$(\mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}})$	stetige lokale Martingale (mit Startwert 0); siehe Definition 2.32
$\mathcal{A}$	$(\mathcal{A}_0)$	stetige FV-Prozesse (mit Startwert 0); siehe Definition 1.13
$\mathcal{A}^+$	$(\mathcal{A}_0^+)$	stetige monoton wachsende FV-Prozesse (mit Startwert 0)
$\mathcal{S}$	$(\mathcal{S}_0)$	stetige Semimartingale (mit Startwert 0); siehe Definition 2.38
$\mathcal{H}^2$	$(\mathcal{H}_0^2)$	stetige uniform quadratintegrierbare Martingale (Startwert 0); siehe Definition 2.40

1 Motivation / Einführung

Wir führen zunächst einige grundlegende Notationen ein. Wir werden im folgenden stochastische Prozesse mit Indexmenge $[0, \infty)$ und Zustandsraum $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^d$ betrachten. Standardmäßig bezeichnen wir mit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ einen Wahrscheinlichkeitsraum. Weiterhin nutzen wir $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ als Notation für eine Filtration, d.h. eine Familie von σ-Algebren, sodass

$$\forall 0 \leq s < t : \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

Definition 1.1.

- Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ heißt $(\mathcal{F}_t)$-*adaptiert*, wenn

$$\forall t \geq 0 : X_t \ \mathcal{F}_t\text{-messbar ist.}$$

- Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ heißt *produktmessbar*, wenn die Abbildung

$$X : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{R}^d$$

  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_+$-messbar ist.

- Einen stochastischen Prozess X nennen wir *càdlàg*, wenn alle Realisierungen rechtstetige Pfade mit linksseitigen Limiten haben ("càdlàg" ist eine Abkürzung für "continue à droite, limitée à gauche"). Analog ist ein càglàd Prozess ein Prozess mit linksstetigen Trajektorien, für die die rechtsseitigen Limiten existieren.

1.1 Motivation anhand eines einfachen Finanzmarktmodells

Wir modellieren einen Finanzmarkt mit einer Aktie und Zinsrate 0 wie folgt:

- Information am Markt zur Zeit t : $\mathcal{F}_t$ (formal: $(\mathcal{F}_t)$ Filtration)
- Wert der Aktie zur Zeit t : S_t (formal: (S_t) reeller adaptierter càdlàg Prozess)
- Handelszeiten : $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$ (zunächst deterministisch)
- Anzahl der Aktien im Portfolio im Zeitintervall $(t_i, t_{i+1}]$: $H^{(i)}$ (formal: $H^{(i)}$ $\mathcal{F}_{t_i}$-messbar)

Die zugehörige *Handelsstrategie* ist nun gegeben durch den adaptierten linksstetigen Prozess

$$H_t = \sum_{i=0}^{n-1} H^{(i)} \, \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t) : \omega \mapsto \sum_{i=0}^{n-1} H^{(i)}(\omega) \, \mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t). \tag{1}$$

Bezeichnen wir mit V_0 das Startkapital so ist der zur Handelsstrategie H gehörende *Vermögensprozess* $(V_t(H))$ gegeben durch

$$V_t(H) = V_0 + \sum_{i=0}^{k-1} H^{(i)}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) + H^{(k)}(S_t - S_{t_k}) \quad \text{für} \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Alternativ haben wir die folgende Darstellung

$$V_t(H) = V_0 + \sum_{i=0}^{n-1} H^{(i)}(S_{t_{i+1}\wedge t} - S_{t_i\wedge t}).$$

Definition 1.2. (i) Ein linksstetiger stochastischer Prozess von der Form

$$H_t = H^{(-1)}\,\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} H^{(i)}\,\mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \qquad (t \geq 0)$$

mit

- $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < \cdots < t_n$
- $X^{(-1)}$ $\mathcal{F}_0$-messbar und $X^{(i)}$ $\mathcal{F}_{t_i}$-messbar für $i = 0, \ldots, n-1$
- $X^{(1)}, \ldots, X^{(n-1)}$ uniform beschränkt

nennen wir *uniform beschränkten elementaren Prozess.* Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}$ die Menge der uniform beschränkten elementaren Prozesse.

(ii) Das (elementare) *stochastische Integral* eines Prozesses $H \in \mathcal{E}$ bzgl. eines adaptierten càdlàg Prozesses X ist definiert als

$$(H \cdot X)_t := \int_0^t H_s \,\mathrm{d}X_s := \sum_{i=0}^{n-1} H^{(i)}(X_{t_{i+1}\wedge t} - X_{t_i \wedge t}).$$

Wir schreiben kurz

$$\int H_s \,\mathrm{d}X_s = \sum_{i=0}^{n-1} H^{(i)}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}).$$

Bemerkung 1.3. Der Funktionswert des elementaren Prozesses zur Zeit 0 hat keinen Einfluss auf den Wert des Integrals. Wir haben den zusätzlichen Term ausschließlich aus technischen Gründen mit in die Definition der elementaren Prozessen aufgenommen.

Proposition 1.4. *(i) Das elementare stochastische Integral ist wohldefiniert.*

(ii) Sowohl der Raum der adaptierten càdlàg Prozesse als auch $\mathcal{E}$ sind linear.

(iii) Das stochastische Integral ist im Integranden und im Integrator linear (d.h. es ist bilinear).

(iv) Das stochastische Integral $H \cdot X$ ist adaptiert und càdlàg.

(v) Ist X ein càdlàg Martingal und $H \in \mathcal{E}$, so ist $H \cdot X$ ein Martingal.

(vi) Es gilt für $H, G \in \mathcal{E}$ das Assoziativgesetz

$$(HG) \cdot X = H \cdot (G \cdot X).$$

Bemerkung 1.5. Allgemein wird in Finanzmarktmodellen der Vermögensprozess, der von einer Handelsstrategie erzeugt wird, durch ein stochastisches Integral beschrieben. Hierbei erlaubt man aber meist allgemeinere Integranden als die von uns bisher betrachteten. Obwohl in der Realität kontinuierlicher Handel nicht möglich ist und Handelsstrategien durch Treppenfunktionen beschrieben werden, macht es Sinn auch allgemeinere Strategien zuzulassen. Betrachtet man zum Beispiel Optimierungsprobleme in Finanzmärkten so findet man meist nur im allgemeineren Modell optimale Strategien.

Unabhängig von der Finanzmathematik werden wir auch noch weitere Anwendungen in der Analysis kennenlernen.

1.2 Integration bzgl. Integratoren von lokal endlicher Variation

Im folgenden betrachten wir den Fall, in dem der Integrator von lokal endlicher Variation ist.

Definition 1.6. Eine Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^d$) ist von *lokal endlicher Variation*, wenn g rechtsstetig ist und für alle $t \geq 0$

$$|g|_t := \sup\{\sum_{i=0}^{n-1} |g_{t_{i+1}} - g_{t_i}| : n \in \mathbb{N}, 0 = t_0 < \cdots < t_n = t\}$$

endlich ist.

Satz 1.7. *Für eine Funktion $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ von lokal endlicher Variation gelten folgende Eigenschaften:*

- *$t \mapsto |g|_t$ ist monoton wachsend und rechtsstetig*
- *Die Funktionen $g^+, g^- : [0,\infty) \to [0,\infty)$ gegeben durch*

  $$g_t^+ = \frac{1}{2}(|g|_t + g_t - g_0) \text{ und } g_t^- = \frac{1}{2}(|g|_t - (g_t - g_0))$$

  sind rechtsstetig, monoton wachsend und starten in der 0 und es gilt

  $$g_t - g_0 = g_t^+ - g_t^- \text{ und } |g|_t = g_t^+ + g_t^-.$$

- *g ist càdlàg.*

Definition 1.8. Für $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ von lokal endlicher Variation und $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt und messbar setzen wir

$$\int_0^t f_s \, \mathrm{d}g_s = \int_{(0,t]} f_s \, \mu^+(\mathrm{d}s) - \int_{(0,t]} f_s \, \mu^-(\mathrm{d}s),$$

wobei μ^+ und μ^- die Maße auf $\mathcal{B}_+ := \mathcal{B}_{(0,\infty)}$ sind mit

$$\mu^+((0,t]) = g_t^+ \text{ und } \mu^-((0,t]) = g_t^-$$

für $t > 0$.

Bemerkung 1.9. Die Existenz der Maße folgt aus der Rechtsstetigkeit, Monotonie und dem Startpunkt 0. Das Integral kann auch für nichtbeschränkte messbare Funktionen f definiert werden. Hierbei muss eine entsprechende Integrierbarkeitsannahme, wie z.B.

$$\int_0^t |f_s| \, \mathrm{d}|g|_s = \int_0^t |f_s| \, \mu^+(\mathrm{d}s) + \int_0^t |f_s| \, \mu^-(\mathrm{d}s) < \infty$$

vorausgesetzt werden.

Satz 1.10 (Interpretation als Riemann-Stieltjes-Integral). *Sei $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ von lokal endlicher Variation. Weiterhin sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ linksstetig und beschränkt. Dann gilt für jede Folge $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Partitionen*

$$\Delta_n : 0 = t_0^{(n)} < \cdots < t_{N(n)}^{(n)} = t$$

von $[0,t]$ deren Feinheit gegen 0 konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{N(n)-1} f_{t_i^{(n)}}(g_{t_{i+1}^{(n)}} - g_{t_i^{(n)}}) = \int_0^t f_s \, \mathrm{d}g_s.$$

Satz 1.11. *Sei g stetig und von lokal beschränkter Variation. Dann gilt für eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $0 \le s < t$*

$$f(g_t) - f(g_s) = \int_s^t f'(g_u) \, \mathrm{d}g_u.$$

Weiterhin ist $(f(g_t))$ wieder ein stetiger Pfad von lokal beschränkter Variation.

Korollar 1.12. *Sei $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine lokal beschränkte messbare Funktion und seien f, g wie im vorhergehenden Satz, so gilt*

$$\int_0^t h_s \, \mathrm{d}f(g_s)) = \int_0^t h_s \, f'(g_s) \, \mathrm{d}g_s.$$

Wir schreiben hierfür kurz

$$\mathrm{d}f(g_s) = f'(g_s) \, \mathrm{d}g_s.$$

Definition 1.13. Einen stochastischen Prozess (A_t) nennen wir *FV-Prozess* (*f*inite *v*ariation), wenn er adaptiert und rechtsstetig ist und jede Realisierung auf jedem Kompaktum endliche Variation hat. Weiterhin bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$ die Familie der *stetigen FV-Prozesse*.

Proposition 1.14. *Ist (A_t) ein FV-Prozess so existieren Maßkerne $\mu^+, \mu^- : \Omega \times \mathcal{B}_+ \to [0,\infty)$ mit*

$$A_t^+(\omega) = \mu^+(\omega, (0,t]) \quad \text{und} \quad A_t^- = \mu^-(\omega, (0,t]) \quad \text{für alle } t \ge 0.$$

Weiterhin sind $\mu^+|_{(0,t]}$ und $\mu^-|_{(0,t]}$ Maßkerne von $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ nach $((0,t], \mathcal{B}_{(0,t]})$.

Wir können nun das stochastische Integral für FV-Integratoren und produktmessbare lokal beschränkte Integranden $H : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definieren indem wir

$$\int_0^t H_s \, \mathrm{d}A_s : \Omega \mapsto \int_0^t H_s(\omega) \, \mu^+(\omega, \mathrm{d}s) - \int_0^t H_s(\omega) \, \mu^-(\omega, \mathrm{d}s)$$

setzen.

Bemerkung 1.15.
- Diese Definition entspricht für elementare Integranden der vorhergehenden Definition.
- Das so definierte Integral ist $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}$-messbar.

Damit das Integral auch $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert ist, benötigen wir eine Zusatzannahme an (H_t).

Definition 1.16. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt *progressiv messbar*, wenn für alle $t \geq 0$

$$\Omega \times [0,t] \to \mathbb{R},\ (\omega, s) \mapsto X_s(\omega)$$

$\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_{[0,t]}$-messbar ist.

Lemma 1.17. *Alle adaptierten rechtsstetigen (linksstetige) Prozesse sind progressiv messbar.*

Proposition 1.18. *Ist (H_t) lokal beschränkt und progressiv messbar und ist (A_t) ein FV-Prozess so ist*

$$\Big(\int_0^t H_s \, \mathrm{d}A_s\Big)_{t\geq 0}$$

ein progressiv messbarer càdlàg Prozess (insbesondere adaptiert).

Wir haben bereits gesehen, dass der Wienerprozess fast sicher auf keinem echten Intervall endlich ist. Somit ist die obige Theorie in dieser Form nicht anwendbar! Wir werden später einen Integrationsbegriff für stetige Martingale kenenlernen. Zuvor müssen wir jedoch noch einige Vorarbeiten leisten.

2 (Semi-)Martingale

2.1 Äquivalenzbegriffe für stochastische Prozesse in stetiger Zeit

Wir haben bereits gesehen, dass der Begriff der bedingten Erwartung, bzw. Objekte in L^p-Räumen nur bis auf $\mathbf{P}$-fast sichere Äquivalenz eindeutig definiert ist. Im folgenden werden wir für stochastische Prozesse zwei Äquivalenztypen verwenden.

Definition 2.1. Seien (X_t) und (X'_t) $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^d$)-wertige stochastische Prozesse.

- (X_t) und (X'_t) sind *Modifikationen* voneinander, wenn
$$\forall t \geq 0 : \mathbf{P}(X_t = X'_t) = 1.$$
- (X_t) und (X'_t) heißen *ununterscheidbar*, wenn es eine Menge $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ gibt mit $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ und
$$\forall \omega \in \Omega_0 \forall t \geq 0 \,:\, X_t(\omega) = X'_t(\omega).$$

Bemerkung 2.2. Die Ununterscheidbarkeit impliziert, dass die Prozesse Modifikationen voneinander sind. Die Umkehrung gilt jedoch im allgemeinen nicht für Prozesse mit überabzählbarer Indexmenge.

Lemma 2.3. *Sind (X_t) und (X'_t) rechtsseitig (oder linksseitig) stetige Prozesse, so sind sie genau dann Modifikationen voneinander, wenn sie ununterscheidbar sind.*

2.2 Die üblichen Bedingungen

Definition 2.4. Eine Filtration $(\mathcal{F}_t)$ heißt rechtsstetig (linkstetig), wenn

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \text{ bzw. } \mathcal{F}_t = \begin{cases} \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s & \text{wenn } t > 0 \\ \mathcal{F}_0 & \text{wenn } t = 0. \end{cases}$$

mit der Konvention, dass $\bigvee$ über die leere Menge $\mathcal{F}_0$ ist.

Lemma 2.5. *Für eine Filtration $(\mathcal{F}_t)$ sind die Filtrationen $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ (bzw. $(\mathcal{F}_{t-})$) gegeben durch*

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \quad \textit{und} \quad \mathcal{F}_{t-} = \begin{cases} \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s & \textit{wenn } t > 0 \\ \mathcal{F}_0 & \textit{wenn } t = 0. \end{cases}$$

rechtsstetig (linksstetig).

Definition 2.6.

- Eine Menge $A \subset \Omega$ nenen wir $(\mathbf{P}, \mathcal{F})$-*Nullmenge* (kurz $\mathbf{P}$-Nullmenge), wenn es eine Menge $A' \in \mathcal{F}$ gibt, sodass
$$\mathbf{P}(A') = 0 \text{ und } A \subset A'.$$
- Einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ nennen wir *vollständig*, wenn $\mathcal{F}_0$ alle $(\mathbf{P}, \mathcal{F})$-Nullmengen enthält.

Bemerkung 2.7. Achtung, damit ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum vollständig ist, reicht es nicht zu fordern, dass $\mathcal{F}_t$ alle $(\mathbf{P}, \mathcal{F}_t)$-Nullmengen enthält!

Einen vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum erhält man durch *Vervollständigen.*

Satz 2.8. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}^0, (\mathcal{F}^0_t), \mathbf{P}^0)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{N}$ die $\mathbf{P}^0$-Nullmengen und setzen*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}^0_t \vee \mathcal{N} = \left\{ A \subset \Omega : \exists A' \in \mathcal{F}^0 \text{ mit } A' \Delta A \in \mathcal{N} \right\}$$

und analog $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \vee \mathcal{N}$. Weiterhin definieren wir $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ durch

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}^0(A') \quad \text{für} \quad A \in \mathcal{F}, A' \in \mathcal{F}_0 \quad \text{mit} \quad A \Delta A' \in \mathcal{N}.$$

Dann ist $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, die Vervollständigung *von $(\Omega, \mathcal{F}^0, (\mathcal{F}^0_t), \mathbf{P}^0)$.*

Definition 2.9. Ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum genügt den *üblichen Bedingungen*, wenn er vollständig ist und die Filtration rechtsseitig stetig ist.

Bemerkung 2.10. Wir werden häufig annehmen, dass ein filtrierter Raum den üblichen Bedingungen genügt. Dies bedeutet in der Regel keine Einschränkung der Allgemeinheit, da wir jeden filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum zunächst vervollständigen können und dann durch den Übergang zur rechtstetigen Filtration zu einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum, der die üblichen Bedingungen erfüllt, gelangen. Wir werden sehen, dass hierbei alle relevanten Messbarkeitseigenschaften, bzw. Martingaleigenschaften erhalten bleiben. Den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum, den wir auf diese Weise gewinnen nennen wir *Augmentierung.*

2.3 Martingale

Wir werden nun eine Martingaltheorie in stetiger Zeit entwickeln. Hierbei werden die Erkenntnisse der diskreten Martingaltheorie sich als nützlich erweisen.

Definition 2.11. Ein stochastischer Prozess $M = (M_t)_{t \geq 0}$ heißt $(\mathcal{F}_t)$-*Submartingal*, wenn

(M1) (M_t) $(\mathcal{F}_t)$-adpatiert ist,

(M2) $\forall t \geq 0 : \mathbf{E}[|M_t|] < \infty$ und

(M3) $\forall 0 \leq s \leq t : \mathbf{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$.

Sind (M_t) und $(-M_t)$ Submartingale, so heißt (M_t) $(\mathcal{F}_t)$-*Martingal.* Ein stochastischer Prozess mit Zusstandsraum $\mathbb{R}^d$ heißt *multivariates Martingal*, wenn jeder Koordinatenprozess ein Martingal ist. Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}$ die Familie der *stetigen Martingale.*

Satz 2.12. *(i) Der Raum der (multivariaten) Martingale ist linear.*

(ii) Sei (M_t) ein multivariates Martingal und $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, sodass $\varphi(M_t)$ für jedes $t \geq 0$ integrierbar ist. Dann ist $(\varphi(M_t))$ ein Submartingal.

(iii) Für $\alpha \geq 0$ und Submartingale (M_t) und (N_t) sind

$$M + N, \alpha M \text{ und } M \vee N$$

Submartingale.

2.4 Stoppzeiten

Definition 2.13. Eine Abbildung $T : \Omega \to [0,\infty]$ heißt $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit, wenn für alle $t \geq 0$

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Die von einer Stoppzeit T erzeugte σ-Algebra ist

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}.$$

Bemerkung 2.14.

- $\mathcal{F}_T$ ist eine σ-Algebra
- Es gilt für eine deterministische Stoppzeit $T(\omega) = t$ $(\omega \in \Omega)$

$$\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t.$$

Lemma 2.15. *Für Stoppzeiten S, T gilt*

- $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$
- *Ist $S \leq T$ so gilt $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.*

Satz 2.16. *Sei X progressiv messbar, X_∞ eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable und T eine Stoppzeit.*

(i) $X_T : \Omega \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^d)$ ist $\mathcal{F}_T$-messbar

(ii) Der gestoppte Prozess $X^T : (\omega, t) \mapsto X_{t \wedge T(\omega)}(\omega)$ ist progressiv messbar.

Lemma 2.17. *Ist $(\mathcal{F}_t)$-rechtsseitig stetig, so ist $T : \Omega \to [0,\infty]$ genau dann eine Stoppzeit, wenn für alle $t \geq 0$*

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t. \tag{2}$$

Bemerkung 2.18. Gilt für eine Abbildung $T : \Omega \to [0,\infty]$ die Eigenschaft (2) für alle $t > 0$, so nennt man T auch *optionale Stoppzeit.* Nach dem letzten Lemma gilt also:

$$(\mathcal{F}_t) \text{ rechtsstetig und } T \text{ optionale Stoppzeit} \implies T \text{ Stoppzeit.}$$

Lemma 2.19. *Seien $S, T, T_1, \dots$ Stoppzeiten. Dann sind*

$$S \wedge T,\ S \vee T,\ S + T \text{ und } \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n$$

wieder Stoppzeiten. Ist $(\mathcal{F}_t)$ rechtsstetig, so ist auch $\inf_{n \in \mathbb{N}} T_n$ eine Stoppzeit.

Definition 2.20. Sei (X_t) ein adaptierter $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess und $A \in \mathcal{B}^d$. Dann heißt

$$T_A(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\}$$

Eintrittszeit von A.

Satz 2.21. *Sei (X_t) ein rechtsstetiger adaptierter Prozess.*

(i) Ist (X_t) sogar stetig, so ist T_A für jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ eine Stoppzeit.

(ii) Ist $(\mathcal{F}_t)$ rechtsstetig, so ist T_A für jede offene Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ eine Stopppzeit.

(iii) Unter den üblichen Bedingungen ist T_A für jede Menge $A \in \mathcal{B}^d$ eine Stoppzeit.

2.5 Konvergenzsätze

Satz 2.22. *Sei (X_t) ein rechtsstetiges Submartingal. Gilt*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbf{E}[X_t^+] < \infty$$

so konvergiert (X_t) fast sicher gegen eine reelle Zufallsvariable X_∞.

Satz 2.23. *Sei (X_t) ein Martingal. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) (X_t) konvergiert in $\mathcal{L}^1$ gegen eine Zufallsvariable X_∞.

(ii) Die Familie $\{X_t : t \geq 0\}$ ist gleichgradig integrierbar.

(iii) Es existiert eine Zufallsvariable $\bar{X}$ sodass

$$X_t = \mathbf{E}[\bar{X}|\mathcal{F}_t], \quad \textit{fast sicher.}$$

für alle $t \geq 0$.

Satz 2.24 (Stoppsatz)**.** *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges (Sub-)Martingal und $S \leq T$ Stoppzeiten sodass S entweder uniform beschränkt ist oder (X_t) in $\mathcal{L}^1$ konvergiert. Dann gilt*

$$\mathbf{E}[X_T|\mathcal{F}_S] \overset{(\geq)}{=} X_S.$$

Lemma 2.25. *Ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges (Sub-)Martingal und T eine Stoppzeit, so ist auch*

$$X^T := (X_t^T)_{t\geq 0} := (X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$$

ein (Sub-)Martingal.

2.6 Doob'sche Ungleichungen

Satz 2.26 (Submartingalungleichung von Doob)**.** *Ist (X_t) ein rechtsstetiges Martingal (oder ein nichtnegatives Submartingal), so gilt für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*

$$\mathbf{E}\big[\sup_{s\leq t} |X_s|^p\big]^{1/p} \leq q\, \mathbf{E}[|X_t|^p]^{1/p}.$$

Insbesondere gilt

$$\mathbf{E}\big[\sup_{s\leq t} X_s^2\big] \leq 4\, \mathbf{E}[X_t^2].$$

Satz 2.27 (Maximalungleichung von Doob)**.** *Ist (X_t) ein rechtsstetiges Martingal (oder ein nichtnegatives Submartingal), so gilt für $\lambda > 0$*

$$\mathbf{P}\big[\sup_{s\leq t} |X_s| \geq \lambda\big] \leq \lambda^{-1}\mathbf{E}[|X_t|].$$

2.7 Regularisierung

Satz 2.28. *Sei (X_t) ein $(\mathcal{F}_t)$-Submartingal. Dann existiert eine $\mathbf{P}$-Nullmenge $N \subset \Omega$, sodass für alle $\omega \in \Omega \backslash N$ die Limites*

$$X_{t+}(\omega) = \lim_{\substack{s \downarrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega) \qquad (t \geq 0)$$

und

$$X_{t-}(\omega) = \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} X_s(\omega) \qquad (t > 0)$$

existieren. Setzen wir $X_{0-} = X_0$, so sind die Prozesse $(M_t^{\pm})$ Submartingale[1] *bezüglich den Filtrationen $(\mathcal{F}_{t\pm})$. Ist zusätzlich $t \mapsto \mathbf{E}[X_t]$ rechtsstetig (linksstetig) so gilt*

$$\mathbf{E}[X_{t+}|\mathcal{F}_t] = X_t \quad (\textit{bzw. } \mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-}] = X_{t-}).$$

Korollar 2.29. *Fast jede Trajektorie von (X_{t+}) ist càdlàg.*

Korollar 2.30. *Sei (X_t) ein rechtsstetiges $(\mathcal{F}_t)$-Submartingal. Dann ist (X_t) auch ein Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_{t+})$ und dessen Augmentierung.*

Korollar 2.31. *Unter den üblichen Bedingungen existiert für ein Submartingal (X_t) mit rechtsstetiger Funktion $t \mapsto \mathbf{E}[X_t]$ eine Modifikation mit càdlàg Trajektorien.*

2.8 Lokale Martingale

Wir verallgemeinern nun den Martingalbegriff noch etwas weiter.

Definition 2.32. Ein adaptierter stochastischer Prozess $M = (M_t)_{t \geq 0}$ ist ein *lokales $(\mathcal{F}_t)$-Martingal*, wenn es eine Folge von $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeiten $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gibt mit

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} T_n = \infty, \text{ fast sicher.}$$

Eine solche Folge von Stoppzeiten nennen wir *Lokalisierungsfolge*. Die Familie der *stetigen lokalen Martingale* bezeichnen wir mit $\mathcal{M}^{\text{loc}}$.

Satz 2.33. *Ist $(M_t)_{t \geq 0}$ ein* stetiges *lokales Martingal, so ist $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben durch*

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$$

eine Lokalisierungsfolge.

Definition 2.34. Sei τ eine $(0, \infty]$-wertige Zufallsvariable. Der Prozess $(X_t : t \in [0, \tau))$ heißt *lokales Martingal*, wenn es eine Folge von monoton wachsenden Stoppzeiten $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $T_n \uparrow \tau$ gibt für die die gestoppten Prozesse X^{T_n} Martingale sind.

Satz 2.35. *Sei $(X_t)_{t \in [0, \tau)}$ ein stetiges lokales Martingal. Dann existiert eine Bijektion $\gamma : [0, \infty) \to [0, \tau)$ (Zeitwechsel), sodass*

[1] Für $\omega \in N$ definieren wir den Wert $X_t^{\pm}(\omega)$ mittels $\limsup$.

- $\gamma(t)$ $(\forall t \geq 0)$ *eine Stoppzeit ist und*
- $(X_{\gamma(t)})_{t\in[0,\infty)}$ *ein stetiges Martingal bezüglich* $(\mathcal{F}_{\gamma(t)})_{t\geq 0}$ *ist.*

Satz 2.36. *Ist* $(X_t)_{t\geq 0}$ *ein lokales rechtsstetiges Martingal mit*

$$\mathbf{E}[\sup_{0\leq s\leq t} |X_s|] < \infty \text{ für alle } t \geq 0,$$

so ist $(X_t)_{t\geq 0}$ *ein Martingal. Insbesondere ist jedes uniform beschränkte rechtsstetige lokale Martingal ein Martingal.*

Wir haben bereits gesehen, dass der Wienerprozess fast sicher über jedem echten Intervall keine endliche Variation hat. Diese Aussage lässt sich weiter vertstärken:

Satz 2.37. *Jedes stetige lokale Martingal von lokal beschränkter Variation ist fast sicher konstant, d.h.* $\mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}} \cap \mathcal{A} = \{0\}$.

Definition 2.38. Die Prozesse des Raums

$$\mathcal{S} := \mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}} \oplus \mathcal{A} = \{M + A : M \in \mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}, A \in \mathcal{A}\}$$

heißen *stetige Semimartingale.*

2.9 Der Raum der uniform quadratintegrierbaren Martingale

Definition 2.39. Der Raum

$$\mathcal{H}^2 := \left\{M \in \mathcal{M}^{\mathrm{loc}} : \mathbf{E}[\sup_{t\geq 0} M_t^2] < \infty\right\}$$

heißt Familie der (stetigen) *uniform quadratintegrierbaren Martingale.*

Satz 2.40. *Der Raum* $\mathcal{H}^2/\!\sim$ *($\sim$ Ununterscheidbarkeit) versehen mit der Norm*

$$M \mapsto \mathbf{E}\big[\sup_{t\geq 0} M_t^2\big]^{1/2}$$

ist ein Banachraum.

2.10 Die quadratische Variation (Doob-Meyer Zerlegung)

Satz 2.41 (Doobsche Zerlegung, Varianzprozess). *Sei* $(X_t)_{t\geq 0}$ *ein stetiges lokales Martingal. Es existiert genau ein stetiger wachsender adaptierter Prozess* $\langle X\rangle = (\langle X\rangle_t)_{t\geq 0}$ *mit Startwert* 0, *sodass*

$$(X_t^2 - X_0^2 - \langle X\rangle_t)_{t\geq 0}$$

ein lokales Martingal ist, die sogenannte quadratische Variation von X.

Zunächst zeigt man die Eindeutigkeit. Danach betrachtet man für eine Zerlegung $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \dots$ von $[0, \infty)$ (d.h. eine strikt wachsende Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $t_n \to \infty$) den Prozess $(Q_t^\Delta)_{t\geq 0}$ gegeben durch

$$Q_t^\Delta = \sum_{i=0}^{\infty} (X_{t_{k+1}\wedge t} - X_{t_k \wedge t})^2 \qquad (t \geq 0),$$

den sogennaten Q-Prozess.

Der Beweis wird in zwei Schritten ausgeführt. Im ersten Schritt beweist man die Aussage für uniform beschränkte Martingale X indem man zeigt, dass für Zerlegungen Δ_n deren Feinheit gegen 0 konvergiert

(i) $X^2 - Q^{\Delta_n}$ ein Martingal ist und

(ii) $(X^2 - Q^{\Delta_n} : n \in \mathbb{N})$ eine Cauchy Folge in $\mathcal{H}^2$ ist.

Danach erweitert man das Resultat auf allgemeine lokale Martingale durch ein Stoppargument.

Lemma 2.42. *Für ein beschränktes stetiges Martingal (X_t) ist $(X_t^2 - Q_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal.*

Lemma 2.43. *Sei $(X_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{M}_0$ uniform beschränkt und $\Delta_n : 0 = t_0^n < t_1^n < \dots$ eine Folge von Zerlegungen von $[0, \infty)$ mit $|\Delta_n| \to 0$. Dann ist*

$$(X^2 - Q^{\Delta_n} : n \in \mathbb{N})$$

eine Cauchy Folge in $\mathcal{H}^2$.

Es folgt hieraus unmittelbar, dass bei einer Darstellung des Limes als $X^2 - \langle X \rangle$ der letztere Prozess die gewünschten Eigenschaften erfüllt. Um den Existenzbeweis der quadratischen Variation zu vervollständigen nutzt man das folgende Lemma.

Lemma 2.44. *Für $(X_t) \in \mathcal{M}_0$ uniform beschränkt und eine Stoppzeit T gilt*

$$\langle X^T \rangle = \langle X \rangle^T.$$

Mithilfe der vorhergenden Lemmas kann man letztendlich die Existenz der quadratischen Variation für $X \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$ zeigen. Die Aussage des vorhergehenden Lemmas gilt analog für $X \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$.

Korollar 2.45. *Ist X ein stetiges quadratintegrierbares Martingal so ist*

$$X^2 - \langle X \rangle$$

ein Martingal.

Definition 2.46. Wir setzen für $X = M + A \in \mathcal{S}$

$$\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t)_{t\geq 0} := \langle M \rangle.$$

und nennen $\langle X \rangle$ die quadratische Variation von X.

Satz 2.47. *Für $X = M + A \in \mathcal{S}$ und Zerlegungen $\Delta_n : 0 = t_0^n < t_1^n < \ldots$ von $[0,\infty)$ mit $|\Delta_n| \to 0$ gilt für jedes $t \geq 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} (X_{t_{i+1}^n \wedge s} - X_{t_i^n \wedge s})^2}_{=Q_s^{\Delta_n}} = \langle X \rangle_s \quad \textit{gleichmäßig für } s \in [0,t],$$

in Wahrscheinlichkeit. D.h. für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\sup_{0\leq s\leq t} |Q_s^{\Delta_n} - \langle X \rangle_s| > \varepsilon) = 0.$$

2.11 Die quadratische Kovariation

Definition 2.48. Für $X, Y \in \mathcal{S}$ bezeichnen wir mit

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(\langle X + Y \rangle - \langle X - Y \rangle)$$

die *Kovariation* (oder auch den Klammerprozess) von X und Y. Insbesondere gilt $\langle X \rangle = \langle X, X \rangle$.

Satz 2.49 (Eigenschaften der Kovariation)**.** *Für $X, Y \in \mathcal{S}$ gilt:*

(i) $\langle X, Y \rangle \in \mathcal{A}_0$

(ii) Die Kovariation ist symmetrisch und bilinear.

(iii) Für eine Stoppzeit T gilt

$$\langle X, Y \rangle^T = \langle X^T, Y \rangle = \langle X^T, Y^T \rangle.$$

(iv) Ist $X \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$, so folgt

$$\langle X \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \textit{ ist fast sicher konstant.}$$

(v) Für eine Familie $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen von $[0,\infty)$ mit $|\Delta_n| \to 0$ und $t \geq 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (X_{t_{i+1}^n \wedge s} - X_{t_i^n \wedge s})(Y_{t_{i+1}^n \wedge s} - Y_{t_i^n \wedge s}) = \langle X, Y \rangle_s, \quad \textit{gleichmäßig in } [0,t],$$

in Wahrscheinlichkeit.

(vi) $MN - (MN)_0 - \langle M, N \rangle \in \mathcal{M}_0^{\text{loc}}$

3 Das stochastische Integral

3.1 Die previsible-σ-Algebra

Ziel des Kapitels ist es das stochastische Integral für previsiblen Integranden einzuführen.

Definition 3.1. (i) Für eine Filtration $(\mathcal{F}_t)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ die σ-Algebra auf $\Omega \times [0, \infty)$, die von den Mengen der Form

$$A \times (a, b] \qquad (0 \leq a \leq b, A \in \mathcal{F}_a)$$

und

$$A \times \{0\} \qquad (A \in \mathcal{F}_0)$$

erzeugt wird, die sogenannte *previsible-σ-Algebra.*

(ii) Ein stochastischer Prozess $X : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^d$) heißt $(\mathcal{F}_t)$-*previsibel*, wenn er bezüglich der previsiblen-σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ messbar ist.

Satz 3.2. *Die previsible-σ-Algebra wird von*

- *den elementaren Prozessen (oder auch $\mathcal{E}$)*
- *den adaptierten càglàd Prozessen*

erzeugt.

Proposition 3.3. *Ein previsibler Prozess ist progressiv messbar.*

3.2 Quadratintegrierbare Martingale als Integratoren

Satz 3.4. *Sind $M, N \in \mathcal{H}^2$ und $H \in \mathcal{E}$, so gilt:*

(i) Die Abbildung $\mathcal{E} \times \mathcal{H}^2 \ni (H, M) \mapsto H \cdot M \in \mathcal{H}_0^2$ ist bilinear

(ii) $\langle H \cdot M, N \rangle_t = \int_0^t H_s \,\mathrm{d}\langle M, N \rangle_s$, kurz $\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle$

(iii) $\langle H \cdot M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s = (H^2 \cdot \langle M \rangle)_t$

(iv) $\|H \cdot M\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \mathbf{E} \int_0^\infty H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s$ (Itô Isometrie)

Definition 3.5. Für $M \in \mathcal{H}^2$ definieren wir ein Maß auf $\Omega \times [0, \infty)$ durch

$$P_M(A \times (s, t]) = \mathbf{E}\Big[\int_s^t \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s\Big].$$

Der entsprechende $\mathcal{L}^2$-Raum für previsible Prozesse ist nun gegeben durch

$$\mathcal{L}^2(M) = \Big\{H \text{ previsibel} : \mathbf{E} \int_0^\infty H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s < \infty\Big\}.$$

Ferner bezeichne

$$\|H\|_M := \mathbf{E}\Big[\int_0^\infty H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M \rangle_s\Big]^{1/2}$$

die zugehörige L^2-Norm und $L^2(M) = \mathcal{L}^2(M)/\sim_M$ den zugehörigen Hilbertraum. Hierbei verwenden wir

$$H \sim_M G :\Longleftrightarrow \mathbf{E} \int_0^\infty (H_s - G_s)^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = 0$$

Wie wir mit obigem Satz gezeigt haben, ist die Abbildung

$$(\mathcal{E}, \|\cdot\|_M) \to (\mathcal{H}_0^2, \|\cdot\|_{H^2}),\ \ H \mapsto H \cdot M$$

eine Isometrie. Insbesondere werden $L^2(M)$ Cauchy-Folgen in $\mathcal{H}^2$ Cauchy-Folgen überführt. Wir werden nun das stochastische Integral für Integranden $H \in L^2(M)$ einführen. Hierzu verwenden wir die folgende Proposition.

Proposition 3.6. *Der Raum $\mathcal{E}$ liegt dicht in $\mathcal{L}^2(M)$.*

Um das stochastische Integral $\int H_s \,\mathrm{d}M_s$ für $M \in \mathcal{H}^2$ und $H \in L^2(M)$ zu definieren, wählen wir eine Folge $(H^n : n \in \mathbb{N})$ von Prozessen aus $\mathcal{E}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} H^n = H \ \text{ in } L^2(M)$$

und setzen

$$H \cdot M := \Big(\int_0^t H_s \,\mathrm{d}M_s\Big)_{t\geq 0} := \lim_{n\to\infty} H^n \cdot M \ \text{ in } \mathcal{H}^2.$$

Das Integral ist wohldefiniert und insbesondere nicht von der Wahl der Cauchy-Folge $(H_n : n \in \mathbb{N})$ abhängig (direkte Folgerung aus der Itô-Isometrie und der Vollständigkeit von $\mathcal{H}^2$).

Wir beweisen ein Analogon von Satz 3.4 für previsible Integranden, wobei wir zunächst Eigenschaft (ii) von zuvor auslassen.

Satz 3.7. *Es gelten folgende Aussagen für $M \in \mathcal{H}^2$ und $H \in \mathcal{E}$:*

(i') Ist $H = (H_t)$ uniform lokal beschränkten so sind die Abbildungen

$$L^2(M) \ni G \mapsto G \cdot M \in \mathcal{H}_0^2 \ \ \textit{und} \ \ \mathcal{H}^2 \ni N \mapsto H \cdot N \in \mathcal{H}_0^2$$

linear.

(iii') $\langle H \cdot M\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s = (H^2 \cdot \langle M\rangle)_t$

(iv') $\|H \cdot M\|_{\mathcal{H}^2}^2 = \mathbf{E} \int_0^\infty H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s$ *(Itô Isometrie)*

Beweis. Aussage (i') folgt direkt aus dem analogen Resultat für elementare Integranden und der Definition des stochastischen Integrals.

(iv'): Sei $(H^n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge aus $\mathcal{E}$ mit $H^n \to H$ in $L^2(M)$. Dann konvergiert $H^n \cdot M$ gegen $H \cdot M$ in $\mathcal{H}^2$, sodass

$$\|H \cdot M\|_{\mathcal{H}^2} \longleftarrow \|H^n \cdot M\|_{\mathcal{H}^2} = \|H^n\|_{L^2(M)} \longrightarrow \|H\|_{L^2(M)}.$$

(iii'): Sei $(H^n : n \in \mathbb{N})$ eine Folge aus $\mathcal{E}$ mit $H^n \to H$ in $L^2(M)$. Nun folgt mit der dritten binomischen Formel und der Cauchy-Schwarz Ungleichung für $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[|(H\cdot M)_t^2 - (H^n\cdot M)_t^2|] &= \mathbf{E}[|((H+H^n)\cdot M)_t\,((H-H^n)\cdot M)_t|]\\ &\leq \underbrace{\|(H+H^n)\cdot M\|_{\mathcal{H}^2}}_{\text{unif. beschr. in } n}\ \underbrace{\|(H-H^n)\cdot M\|_{\mathcal{H}^2}}_{=\|H-H^n\|_{L^2(M)}\to 0\text{ (iv')}} \to 0\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[|(H^2\cdot\langle M\rangle)_t - ((H^n)^2\cdot\langle M\rangle)_t|] &= \mathbf{E}[|((H+H^n)(H-H^n)\cdot\langle M\rangle)_t|]\\ &\leq \underbrace{\|H+H^n\|_{L^2(M)}}_{\text{unif. beschr. in } n}\ \underbrace{\|H-H^n\|_{L^2(M)}}_{\to 0} \to 0\end{aligned}$$

Somit konvergieren die Zufallsvariablen $(H^n\cdot M)_t^2$ und $((H^n)^2\cdot\langle M\rangle)_t$ gegen $(H\cdot M)_t^2$ und $(H^2\cdot\langle M\rangle)_t$ in $L^1(\mathbf{P})$ für $n\to\infty$. Es folgt für $0\leq s\leq t$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(H\cdot M)_t^2 - (H^2\cdot\langle M\rangle)_t|\mathcal{F}_s] &\longleftarrow \mathbf{E}[(H^n\cdot M)_t^2 - ((H^n)^2\cdot\langle M\rangle)_t|\mathcal{F}_s]\\ &= (H^n\cdot M)_s^2 - ((H^n)^2\cdot\langle M\rangle)_s \longrightarrow (H\cdot M)_s^2 - (H^2\cdot\langle M\rangle)_s,\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz in $L^1(\mathbf{P})$ gilt. □

3.3 Semimartingale als Integratoren

Zunächst definieren wir das stochastische Integral für Integratoren $M \in \mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}$. Hierzu verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 3.8. *Sei $H \in L^2(M)$ und T eine Stoppzeit. Dann gilt:*

$$(H\cdot M)^T = H\cdot M^T.$$

Definition 3.9. Für $M \in \mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}$ betrachten wir

$$\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(M) = \left\{H \text{ previsibel} \;\middle|\; \forall t\geq 0: \int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty,\ \text{fast sicher}\right\}$$

und $L^2_{\mathrm{loc}}(M) = \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)/\sim_M$, wobei $H \sim_M G \ :\Leftrightarrow\ H = G\ P_M$-fast überall.

Seien nun $M \in \mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}$ und $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ und

$$T_n = \inf\{t\geq 0: \int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}\langle M\rangle_s \geq n \text{ oder } \langle M\rangle_t \geq n\} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Dann ist $M^{T_n} \in \mathcal{H}^2$ und $H \in L^2(M)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und wir erhalten mit dem vorhergehenden Lemma, dass

$$(H\cdot M^{T_n}) = (H\cdot M^{T_{n+1}})^{T_n}.$$

Da laut Voraussetzung $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Lokalisierungsfolge ist, können wir nun das stochastische Integral $H\cdot M$ als das eindeutige (bis auf Ununterscheidbarkeit) stetige lokale Martingal mit der Eigenschaft

$$(H\cdot M)^{T_n} = H\cdot M^{T_n}$$

definieren.

Wir definieren nun das stochastische Integral für Integratoren $X = M + A \in \mathcal{S}$ mit $M \in \mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}$ und $A \in \mathcal{A}$.

Definition 3.10. (i) Wir setzen

$$\mathcal{I}(X) := \big\{ H \text{ previsibel} \;\big|\; H \in \mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}(M) \cap \mathcal{L}^{1,\mathrm{loc}}(A) \big\},$$

wobei $\mathcal{L}^{1,\mathrm{loc}}(A)$ die Menge der produktmessbaren Funktionen $H : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall t \geq 0 : \int_0^t |H_s| \, \mathrm{d}|A|_s < \infty, \text{ fast sicher,}$$

bezeichnet.

(ii) Wir definieren $I(X) := \mathcal{I}(X)/\!\sim_S$, wobei

$$H \sim_S G \quad \Leftrightarrow \quad H = G \;\; P_M \text{ und } P_A \text{ fast überall, wobei } S = M + A \in \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{A}.$$

Hierbei ist P_A das Maß auf $\Omega \times [0,\infty)$ mit

$$P_A(B \times (s,t]) = \mathbf{E}\Big[\int_s^t \mathbb{1}_B \, \mathrm{d}|A|_s\Big] \qquad (B \in \mathcal{F}).$$

(iii) Für $H \in I(X)$ definieren wir

$$H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A.$$

Bemerkung 3.11. (i) Dass $H \cdot A$ wohldefiniert ist, haben wir bereits in Kapitel 1 gesehen.

(ii) $H \cdot X$ ist bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig definiert und formal bildet das stochastische Integral Elemente $X \in \mathcal{S}/\!\sim$ und $H \in I(X)$ auf ein Element $H \cdot X$ aus $\mathcal{S}/\!\sim$ ab. (Hierbei bezeichnet $\sim$ die Äquivalenzrelation der Ununterscheidbarkeit.) Wird die Abbildung in dieser Weise aufgefasst, so ist für festes $X \in \mathcal{S}/\!\sim$

$$I(X) \ni H \mapsto H \cdot X \in \mathcal{S}/\!\sim$$

injektiv (Übungsaufgabe).

(iii) Man beachte, dass alle lokal beschränkten previsiblen Prozesse bezüglich jedes Semimartingals integrierbar sind.

3.4 Eigenschaften des Itô Integrals

Satz 3.12. *Seien $X \in \mathcal{S}$ und $H \in \mathcal{I}(X)$*

(i) Die Abbildung

$$\{\textit{lok. beschränkte previsible Prozesse}\} \times \mathcal{S}/\!\sim \;\ni (H,X) \mapsto H \cdot X \in \mathcal{S}/\!\sim$$

ist bilinear.

(ii) $\langle H\cdot X\rangle_t = \int_0^t H_s^2\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s = (H^2\cdot\langle X\rangle)_t$

(iii) *Für* $G\in\mathcal{I}(H\cdot X)$ *gilt*

$$GH\in\mathcal{I}(X) \textit{ und } (GH)\cdot X = G\cdot(H\cdot X)$$

(iv) *a.)* $X\in\mathcal{M}^{\mathrm{loc}} \;\Rightarrow\; H\cdot X\in\mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}$
b.) $X\in\mathcal{A} \;\Rightarrow\; H\cdot X\in\mathcal{A}_0$.

(v) $(H\cdot X)^T = (H\mathbb{1}_{[0,T]})\cdot X = H\cdot X^T$ *für alle Stoppzeiten* T

(vi) *Für fast jedes* $\omega\in\Omega$ *und für alle* $0\le a<b$ *gilt:*

$$H(\omega)=0 \textit{ auf } [a,b] \quad \textit{oder} \quad X(\omega) \textit{ konstant auf } [a,b] \;\Rightarrow\; H\cdot X \quad \textit{konstant auf } [a,b]$$

Satz 3.13 (Majorisierter Konvergenzsatz der stochastischen Integration)**.** *Sei* $X=M+A\in\mathcal{S}$ *und* $H\in\mathcal{I}(X)$. *Gilt für eine Folge* $(H_n:n\in\mathbb{N})$ *previsibler Prozesse*

$$|H^n|\le H \quad \textit{und} \quad H_t^n\to 0 \textit{ f.s.}, \forall t\ge 0$$

so folgt für $t\ge 0$

$$H^n\cdot X\to 0 \quad \textit{gleichmäßig auf } [0,t], \textit{ in Wahrscheinlichkeit.}$$

Beweis. Sei $X=M+A\in\mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}\oplus\mathcal{A}$ und

$$T_m := \inf\{t\ge 0: \int_0^t |H_s^2|\,\mathrm{d}\langle X\rangle_s + \int_0^t |H_s|\,\mathrm{d}|A|_s\ge m\}.$$

Wegen des klassischen majorisierten Konvergenzsatzes gilt

$$\Big|\int_0^{t\wedge T_m} H_s^n\,\mathrm{d}A_s\Big| \le \int_0^t \underbrace{|\mathbb{1}_{[0,T_m]}(s)H_s^n|}_{\le \mathbf{1}_{[0,T_m]}(s)H_s}\,\mathrm{d}|A|_s\to 0.$$

Ferner gilt wegen der Itô Iometrie und der Doob-Ungleichung

$$\mathbf{E}\Big[\sup_{s\le t}\big((H^n\cdot M)_s^{T_m}\big)^2\Big] \le 4\,\mathbf{E}\big[\big((H^n)^2\cdot\langle M\rangle\big)_t^{T_m}\big] = 4\,\mathbf{E}\big[\big((\mathbb{1}_{[0,T_m]}H^n)^2\cdot\langle M\rangle\big)_t\big]\to 0.$$

Mithilfe der Chebyshev Ungleichung folgt für $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(\sup_{s\le t}|(H^n\cdot X)_s^{T_m}|>\varepsilon)=0$$

und die Aussage folgt, da (T_n) eine Lokalisierungsfolge ist. □

Satz 3.14 (Approximation durch Riemannsummen)**.** *Ist* $(H_t)_{t\ge 0}$ *linksstetig adaptiert und lokal beschränkt und* $X\in\mathcal{S}$, *so gilt für eine Folge von Zerlegungen* $\Delta_n: 0=t_0<t_1<\ldots$ *von* $[0,\infty)$ *mit* $|\Delta_n|\to 0$

$$\int_0^s H_u\,\mathrm{d}X_u = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty} H_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n\wedge s}-X_{t_i^n\wedge s}) \quad \textit{gleichmäßig auf } [0,t], \textit{ in Wahrscheinlichkeit.}$$

Beweis. Mit $\pi^n(t) := \sup \Delta_n \cap [0,t)$ $(n \in \mathbb{N},\, t \geq 0)$ erhalten wir die Darstellung

$$\sum_{i=0}^{\infty} H_{t_i^n}(X_{t_{i+1}^n \wedge s} - X_{t_i^n \wedge s}) = \int_0^s H_{\pi^n(u)} \,\mathrm{d}X_u.$$

Wegen der Linksstetigkeit von H konvergieren die Prozesse $\{(H_{\pi^n(s)})_{s\geq 0} : n \in \mathbb{N}\}$ punktweise gegen H und $(\sup_{u\leq s} |H_u|)_{s\geq 0}$ ist eine integrierbare Majorante, sodass die Aussage direkt aus dem majorisierten Konvergenzsatz der stochastischen Analysis folgt. □

3.5 Die Kunita-Watanabe Ungleichung

Es verbleibt noch das Analogon zu Eigenschaft (ii) aus Satz 3.4 zu beweisen. Hierzu werden wir die sogenannte Kunita-Watanabe Ungleichung verwenden. Wir schreiben in Analogie zur Definition der Variationsnorm

$$|\langle X,Y\rangle|_t : \Omega \ni \omega \mapsto \sup\Big\{\sum_{k=0}^{n-1} \big|\langle X,Y\rangle_{t_{k+1}}(\omega) - \langle X,Y\rangle_{t_k}(\omega)\big| : 0 = t_0 < \cdots < t_n = t\Big\}$$

für Semimartingale X, Y.

Satz 3.15 (Kunita-Watanabe Ungleichung). *Seien $X, Y \in \mathcal{S}$ und $H, K : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ produktmessbar. Dann gilt für $t \geq 0$*

$$\int_0^t |H_s K_s| \,\mathrm{d}|\langle X,Y\rangle|_s \leq \Big(\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle X\rangle_s\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t K_s^2 \,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s\Big)^{1/2}$$

Beweis. a.) Wir zeigen zunächst die Aussage für Indikatoren über Intevalle $(s,t]$. Wir schreiben kurz für Semimartingale $S, T \in \mathcal{S}$

$$\langle S,T\rangle_s^t = \langle S,T\rangle_t - \langle S,T\rangle_s \quad \text{und} \quad \langle S\rangle_s^t = \langle S\rangle_t - \langle S\rangle_s.$$

Da für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \langle \lambda X + Y\rangle = \langle X\rangle_s^t \,\lambda^2 + 2\langle X,Y\rangle_s^t \,\lambda + \langle Y\rangle_s^t$$

gilt, hat das quadratische Polynom

$$\mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \underbrace{\langle X\rangle_s^t}_{=:a} \lambda^2 + \underbrace{2\langle X,Y\rangle_s^t}_{=:b} \lambda + \underbrace{\langle Y\rangle_s^t}_{=:c}$$

fast sicher maximal eine Nullstell oder ist konstant 0. Es folgt, dass

$$0 \geq b^2 - 4ac = 4(\langle X,Y\rangle_s^t)^2 - 4\langle X\rangle_s^t\langle Y\rangle_s^t.$$

Als nächstes sei $\Delta_n : s = t_0 < \cdots < t_{N(n)} = t$ eine Folge von Zerlegungen von $[s,t]$ deren Feinheit gegen Null konvergiert. Es gilt

$$|\langle X,Y\rangle|_s^t = |\langle X,Y\rangle|_t - |\langle X,Y\rangle|_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{N(n)-1} |\langle X,Y\rangle_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}|$$

Ferner gilt wegen Cauchy-Schwarz und obiger Ungleichung

$$\sum_{i=0}^{N(n)-1} |\langle X, Y\rangle_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}| \leq \Big(\sum_{i=0}^{N(n)-1} \langle X\rangle_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=0}^{N(n)-1} \langle Y\rangle_{t_i^n}^{t_{i+1}^n}\Big)^{1/2} = (\langle X\rangle_s^t)^{1/2}(\langle Y\rangle_s^t)^{1/2}.$$

Es folgt, dass $|\langle X, Y\rangle|_s^t \leq (\langle X\rangle_s^t)^{1/2}(\langle Y\rangle_s^t)^{1/2}$.

b.) Als nächstes zeigen wir die KW-Ungleichung für $K, H \in \mathcal{E}$. Wir nehmen an dass beide Darstellungen die gleichen Stützstellen besitzen und folgern mittels Teil (a) und der Cauchy Schwarz Ungleichung, dass

$$\begin{aligned}
\int_0^t |H_s K_s| \,\mathrm{d}|\langle X, Y\rangle|_s &= \sum_{i=0}^{n-1} |H^{(i)} K^{(i)}|\, |\langle X, Y\rangle|_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t} \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} |H^{(i)}|((\langle X\rangle_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t})^{1/2} |K^{(i)}|((\langle Y\rangle_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t})^{1/2} \\
&\leq \Big(\sum_{i=0}^{n-1} (H^{(i)})^2 \langle X\rangle_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=0}^{n-1} (K^{(i)})^2 \langle Y\rangle_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t}\Big)^{1/2} \\
&= \Big(\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle X\rangle_s\Big)^{1/2} \Big(\int_0^t K_s^2 \,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

c.) Im letzten Schritt nutzen wir ein Approximationsargument zum Beweis der allgeminen Aussage. Zunächst seien H, K uniform beschränkt Dann existieren Prozesse $(H^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ und $(K^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ in $\mathcal{E}$ mit

$$\int_0^t [|H^{(n)} - H| + |G^{(n)} - G|] \,\mathrm{d}(\langle X\rangle + \langle Y\rangle + |\langle X, Y\rangle|) \to 0,$$

sodass

$$\begin{aligned}
\int_0^t |H_s K_s| \,\mathrm{d}|\langle X, Y\rangle|_s \leftarrow \int_0^t |H_s^{(n)} K_s^{(n)}| \,\mathrm{d}|\langle X, Y\rangle|_s &\leq \Big(\int_0^t H_s^{(n)2} \,\mathrm{d}\langle X\rangle_s\Big)^{1/2} \Big(\int_0^t K_s^{(n)2} \,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s\Big)^{1/2} \\
&\to \Big(\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle X\rangle_s\Big)^{1/2} \Big(\int_0^t K_s^2 \,\mathrm{d}\langle Y\rangle_s\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Für uneschränkte H, K folgt die Aussage mittels monotoner Konvergenz. □

Bemerkung 3.16. Ist die linke Seite der Kunita-Watanabe Ungleichung endlich so ist insbesondere $\int_0^t H_s K_s \,\mathrm{d}\langle X, Y\rangle_s$ wohldefiniert und es gilt

$$\Big|\int_0^t H_s K_s \,\mathrm{d}\langle X, Y\rangle_s\Big| \leq \int_0^t |H_s K_s| \,\mathrm{d}|\langle X, Y\rangle|_s$$

Korollar 3.17. *Für zwei Semimartingale $X, Y \in \mathcal{S}$ und $H \in \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(Y)$ gilt $H \in \mathcal{I}(X + Y)$ und*

$$H \cdot (X + Y) = H \cdot X + H \cdot Y.$$

Korollar 3.18. *Es gilt für $X, Y \in \mathcal{S}$ und $H \in I(X)$:*

$$\langle H \cdot X, Y \rangle = H \cdot \langle X, Y \rangle.$$

Beweis. Es reicht die Aussage unter der Annahme, dass $\langle X \rangle$ und $H^2 \cdot \langle X \rangle$ uniform beshränkt sind zu beweisen. Die allgemeine Aussage folgt dann mittels Lokalisation. Nun ist X die direkte Summe eines Martingals $M \in \mathcal{H}_0^2$ und eines Prozesses $A \in \mathcal{A}$ und wir wählen eine Folge $(H^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ elementarer Prozesse mit $H^{(n)} \to H$ in $L^2(M)$. Es folgt mittels Kunita-Watanabe

$$|\langle H \cdot X, Y \rangle_t - \langle H^{(n)} \cdot X, Y \rangle_t| \leq \langle (H - H^{(n)}) \cdot X \rangle_t^{1/2} \langle Y \rangle_t^{1/2} = \Big(\int_0^t (H_s - H_s^{(n)})^2 \,\mathrm{d}\langle X \rangle_s \Big)^{1/2} \langle Y \rangle_t^{1/2} \to 0$$

und analog

$$|H \cdot \langle X, Y \rangle_t - H^{(n)} \cdot \langle X, Y \rangle_t| \leq \Big(\int_0^t (H_s - H_s^{(n)})^2 \,\mathrm{d}\langle X \rangle_s \Big)^{1/2} \langle Y \rangle_t^{1/2} \to 0.$$

Somit gilt

$$\langle H \cdot X, Y \rangle_t \longleftarrow \langle H^{(n)} \cdot X, Y \rangle_t = (H^{(n)} \cdot \langle X, Y \rangle)_t \longrightarrow (H \cdot \langle X, Y \rangle)_t.$$

□

3.6 Itô Differentiale

Unter dem Itô Differential eines Semmartingals X versteht man die Abbildung die nichtleeren Intervallen $[a, b] \subset [0, \infty)$ auf reelle Zufallsvariablen abbildet:

$$\mathrm{d}X_t : [a, b] \mapsto \int_a^b \mathrm{d}X_s = X_b - X_a$$

Zuzätzlich schreiben wir für $H \in I(X)$

$$H_t \,\mathrm{d}X_t : [a, b] \mapsto \int_a^b H_t \,\mathrm{d}X_t = (H \cdot X)_b - (H \cdot X)_a$$

Weiterhin verwenden wir für zwei Semimartingale $X, Y \in \mathcal{S}$ die Konvention

$$\mathrm{d}X_t \,\mathrm{d}Y_t := \mathrm{d}\langle X, Y \rangle_t$$

Aufgrund der Symmetrie und Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gelten das Kommutativgesetz und das Distributivgesetz. Weiterhin gilt das Assoziativgesetz.
Viele Aussagen lassen sich nun im *Itô Differentialkalkül* darstellen. Für lokal beschränkte previsible Prozesse H, G gilt zum Beispiel:

$$\mathrm{d}(G \cdot (H \cdot X))_t = G_t \,\mathrm{d}(H \cdot X)_t = G_t H_t \,\mathrm{d}X_t$$

3.7 Die Itô-Formel

Satz 3.19. *Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $X^{(1)}, \dots, X^{(d)} \in \mathcal{S}$. Es gilt*

$$f(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)}) - f(X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(d)}) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \partial_{x_i} f(X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(d)}) \,\mathrm{d}X_s^{(i)}$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \partial_{x_i x_j} f(X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(d)}) \,\mathrm{d}\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_s.$$

Insbesondere ist $(f(X_t))_{t\geq 0}$ wieder ein stetiges Semimartingal.

Bemerkung 3.20. Im Itô-Differentialkalkül lautet die Itô-Formel:

$$\mathrm{d}f(X_t) = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} f(X_t) \,\mathrm{d}X_t^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i x_j} f(X_t) \,\mathrm{d}X_t^{(i)} \,\mathrm{d}X_t^{(j)}$$

Korollar 3.21 (Partielle Integration)**.** *Für $X, Y \in \mathcal{S}$ gilt*

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_s \,\mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \,\mathrm{d}X_s + \langle X, Y \rangle_s.$$

Im Itô Differentialkalkül erhält man

$$\mathrm{d}(XY)_t = X_t \,\mathrm{d}Y_t + Y_t \,\mathrm{d}X_t + \mathrm{d}\langle X, Y \rangle_t.$$

3.8 Multivariate Integration

In diesem Abschnitt führen wir die Notation zur Integration von Matrix-wertigen Integranden bzgl. multivariater Semimartingale ein. Hierbei folgen wir den Rechenregeln der Matrixmultiplikation. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten

- ein multivariates Semimartingal $X = (X^1, \dots, X^m)$ (d.h. $X^1, \dots, X^m \in \mathcal{S}$) und
- einen previsiblen Matrix-wertigen Prozess $H = (H^{i,j} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m)$ (d.h. $H^{i,j}$ sind reelle previsible Prozesse)

und wir bezeichnen mit

$$(H \cdot X)_t = \int_0^t H_s \,\mathrm{d}X_s$$

das multivariate Semimartingal definiert durch

$$(H \cdot X)_t^i := (H^{i,\cdot} \cdot X)_t := \sum_{j=1}^{n} \int_0^t H_s^{i,j} \,\mathrm{d}X_s^j.$$

Zur Wohldefiniertheit muss $H^{i,j} \in \mathcal{I}(X^j)$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$ gelten. Hierfür schreiben wir kurz $H \in \mathcal{I}(X)$. Wir nutzen analoge Definitionen für die Itô Differentiale.

Beispiel 3.22. Ist W ein m-dimensionaler Wienerprozess, so folgt für eine C^2-Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t \nabla f(W_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(W_s)\,\mathrm{d}s.$$

Ferner gilt für $H \in \mathcal{I}(W)$ und ein multivariates Semimartingal Y mit

$$\mathrm{d}Y_t = A_t\,\mathrm{d}W_t$$

gerade für $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$g(Y_t) - g(Y_0) = \int_0^t \nabla g(Y_s) A_t\,\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta_{(AA^*)_t} g(Y_s)\,\mathrm{d}s,$$

wobei Δ_B ($B \in \mathbb{R}^{n\times n}$) den Differentialoperator $\Delta_B = \sum_{i,j} B^{i,j}\partial_{x_i,x_j}$ bezeichnet.

3.9 Das stochastische Exponential

Definition 3.23. Sei $X \in \mathcal{S}$. Das Semimartingal $\mathcal{E}(X)$ gegeben durch

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp\Big\{X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\Big\}$$

heißt *stochastisches Exponential von X*.

Satz 3.24. *Der Prozess $Y = \mathcal{E}(X)$ ist die eindeutige Lösung der* stochastischen Differentialgleichung *(d.h. das eindeutige Semimartingal mit)*

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = Y_t\,\mathrm{d}X_t \\ Y_0 = \exp\{X_0\}. \end{cases}$$

Beispiel 3.25. Es gelte $Y = \mathcal{E}(X)$. Kann man X als stochastisches Integral bzgl. Y darstellen? Es gilt

$$\mathrm{d}Y_t = Y_t\,\mathrm{d}X_t.$$

Da $Y = (Y_t)$ als stochastisches Exponential fast sicher niemals die Null berührt erhält man durch aufintegrieren des Integranden $\frac{1}{Y_t}$

$$\frac{1}{Y_t}\,\mathrm{d}Y_t = \mathrm{d}X_t.$$

D.h. X erfüllt die Gleichung

$$X_t = \log Y_0 + \int_0^t \frac{1}{Y_s}\,\mathrm{d}Y_s.$$

X heißt *stochastischer Logarithmus* von Y; kurz $X = \mathcal{L}(Y)$.

Bemerkung 3.26. Für Pfade von lokal endlicher Variation erhalten wir die Exponentialfunktion:

$$X \in \mathcal{A} \implies \mathcal{E}(X) = (\exp(X_t))_{t\geq 0}$$

4 Markov Prozesse

4.1 Lévy's Charakterisierung des Wienerprozesses

Definition 4.1. Ein stetiger (d-dimensionaler) stochastischer Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_0 = 0$ heißt $(\mathcal{F}_t)$-Wienerprozes, wenn er $(\mathcal{F}_t)$-adatiert ist und für alle $0 \leq s < t$

$$\mathbf{P}_{X_t - X_s|\mathcal{F}_s} = \mathcal{N}(0, (t-s)I_d) \tag{3}$$

gilt.

Bemerkung 4.2. Die Bedingung (3) ist äquivalent zu

- $X_t - X_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$
- $X_t - X_s$ ist $\mathcal{N}(0, (t-s)I_d)$-verteilt.

Insbesondere folgt, dass die Inkremente über paarweise disjunkte Intervalle unabhängig sind. Ein $(\mathcal{F}_t)$-Wienerprozess ist insbesondere ein Wienerprozess im urspünglichen Sinne.

Satz 4.3 (Lévy's Charakterisierung des Wienerprozesses)**.** *Sei X ein stetiger adaptierter $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess mit $X_0 = 0$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- *(X_t) ist ein $(\mathcal{F}_t)$-Wienerprozess*
- *$\forall i, j = 1, \ldots, d : \langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij} t$.*

4.2 Grundlagen

Definition 4.4. Eine d-dimensionale *Markov-Familie* besteht aus

- einem filtrierten messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t))$,
- einem $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ und
- einem Markovkern $\mathbf{P} : \mathbb{R}^d \times \mathcal{F} \to [0,1]$ von $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ nach $(\Omega, \mathcal{F})$

mit den Eigenschaften:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^d : \mathbf{P}^x(X_0 = x) = 1$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^d,\ t, s \geq 0$ und $\Gamma \in \mathcal{B}^d$ gilt

$$\mathbf{P}^x(X_{t+s} \in \Gamma | \mathcal{F}_s)(\omega) = \mathbf{P}^{X_s(\omega)}(X_t \in \Gamma) \quad \mathbf{P}^x\text{-fast sicher},$$

d.h.

$$\mathbf{P}^x_{X_{t+s}|\mathcal{F}_s}(\omega, \Gamma) = \mathbf{P}^{X_s(\omega)}(X_t \in \Gamma) \quad \mathbf{P}^x\text{-fast sicher}.$$

Wir nennen das Tupel $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \{\mathbf{P}^x : x \in \mathbb{R}^d\}, X)$ Markov-Familie.

Bemerkung 4.5. Für eine Markov-Familie gilt insbesondere

$$\mathbf{P}^x_{X_{t+s}|\mathcal{F}_s} = \mathbf{P}^x_{X_{t+s}|\sigma(X_s)},$$

die sogenannte *Markov-Eigenschaft*.

Beispiel 4.6. Die kanonische Markov-Familie des Wienerprozesses besteht aus

- $\Omega = C[0,\infty)$ (oder $C([0,\infty),\mathbb{R}^d)$ im multivariaten Fall)
- $\mathcal{F}_t = \sigma(\pi_s : s \leq t)$ und $\mathcal{F} = \sigma(\pi_s : s \geq 0)$, wobei $\{\pi_t : t \geq 0\}$ die Auswertungsfunktionale an der jeweiligen Stellen t auf Ω bezeichnen (Projektionen),
- $\mathbf{P}^x = \mathcal{W} \circ \theta_x^{-1}$ der in x gestartete Wienerprozess (hierbei bezeichnen $\mathcal{W}$ das Wienermaß und $\theta_x : \Omega \to \Omega, \omega \mapsto (x + \omega_t)_{t\geq 0}$ den Shift um den Wert x)
- $X = (X_t)_{t\geq 0} = (\pi_t)_{t\geq 0}$

Es folgt nun unmittelbar, dass diese Wahl zu einer Markov-Familie führt:

- $\mathbf{P}^x(X_0 = x) = \mathcal{W}(\pi_0 = 0) = 1$
- $\mathbf{P}^x(X_{t+s} \in \Gamma|\mathcal{F}_s)(\omega) = \mathcal{N}(X_s(\omega), t)(\Gamma) = \mathbf{P}^{X_s(\omega)}(X_t \in \Gamma)$.

In der Definition der Markov-Familie wird gefordert, dass gegeben die Information $\mathcal{F}_s$ der Wert des Prozesse zu einem zukünftigen Zeitpunkt $t + s$ genauso verteilt ist, wie der in X_s gestartete Prozess zur Zeit t. Es stellt sich nun die Frage, ob dies auch für die gesamte zukünftige Trajektorie gilt.

Satz 4.7. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \{\mathbf{P}^x : x \in \mathbb{R}^d\}, X)$ eine Markov-Familie. Es gilt für $\Gamma \in \bigotimes_{t\geq 0} \mathcal{B}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$:*

$$\mathbf{P}^x_{X_{s+\cdot}|\mathcal{F}_s}(\omega, \Gamma) = \mathbf{P}^{X_s(\omega)}(X \in \Gamma) \quad \textit{für } \mathbf{P}^x\textit{-fast alle } \omega. \tag{4}$$

Insbesondere existiert eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}^x_{X_{s+\cdot}|\mathcal{F}_s}$. Hierbei bezeichnet $X_{s+\cdot}$ den Prozess $(X_{s+t})_{t\geq 0}$.

Es stellt sich die Frage, ob man die deterministische Zeit s in der Gleichung (4) durch eine Stoppzeit ersetzen kann.

Definition 4.8. Eine Markov-Familie erfüllt die *starke Markov Eigenschaft*, wenn für jede Stoppzeit S

$$\mathbf{P}^x_{X_{S+\cdot}|\mathcal{F}_S}(\omega, \Gamma) = \mathbf{P}^{X_S(\omega)}(X \in \Gamma) \quad \text{für } \mathbf{P}^x\text{-fast alle } \omega \text{ gilt.}$$

Insbesondere muss hierzu $X_{S+\cdot}$ ein stochastischer Prozess sein (d.h. $\mathcal{F}$-$\otimes_{t\geq 0}\mathcal{B}^d$-messbar sein).

Bemerkung 4.9. Zum Beweis der starken Markov Eigenschaft reicht es zu beweisen, dass für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $\Gamma \in \mathcal{B}^d$

$$\mathbf{P}^x_{X_{S+t}|\mathcal{F}_S}(\omega, \Gamma) = \mathbf{P}^{X_S(\omega)}(X_t \in \Gamma) \quad \text{für } \mathbf{P}^x\text{-fast alle } \omega \text{ gilt.}$$

Dass dies ausreicht, folgt wie im Fall deterministischer Zeiten $S = s$.

Wir betrachten zunächst den Wienerprozess.

4.3 Die starke Markov Eigenschaft des Wienerprozesses

Satz 4.10. *Sei (W_t) ein $(\mathcal{F}_t)$-Wienerprozess und S eine fast sicher endliche Stoppzeit. Dann ist*

$$X = (W_{S+t} - W_S)_{t\geq 0}$$

ein $(\mathcal{F}_{(S+t)+})_{t\geq 0}$-Wienerprozess. Insbesondere ist damit X ein von $\mathcal{F}_{S+}$ unabhängiger Wienerprozess.

Es folgt die starke Markov Eigenschaft für den Wienerprozess.

Korollar 4.11. *Sei W ein $(\mathcal{F}_t)$-Wienerprozess und S eine fast sicher beschränkte Stoppzeit. Es gilt für $\Gamma \in \bigotimes_{t\geq 0} \mathcal{B}^d$*

$$\mathbf{P}_{W_{S+\cdot}|\mathcal{F}_{S+}}(\omega, \Gamma) = \mathbf{P}^{W_S(\omega)}(\widetilde{W} \in \Gamma)$$

für $\mathbf{P}$-fast alle ω. (Hierbei ist $\widetilde{W}$ ein stochastischer Prozess auf einem messbaren Raum und $\{\mathbf{P}^x : x \in \mathbb{R}^d\}$ eine Familie von Maßen unter denen $\widetilde{W}$ ein in x gestarteter Wienerprozess ist.) Insbsondere gilt für ein beschränktes messbares Funnktional $\Psi : C([0,\infty), \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{E}[\Psi(W_{S+\cdot})|\mathcal{F}_{S+}] = \mathbf{E}[\phi(W_S)]$$

mit $\phi(x) := \mathbf{E}^x[\Psi(\widetilde{W})]$.

Als eine Anwendung dieses Resultats erhalten wir:

Korollar 4.12. *Sei W ein eindimensionaler Wienerprozess. Für $a \geq 0$ und $t > 0$ gilt*

$$\mathbf{P}(\max_{s\in[0,t]} W_s \geq a) = 2\,\mathbf{P}(W_t \geq a).$$

Korollar 4.13. *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränkte offene Menge in $\mathbb{R}^d$ und sei $\phi : \partial U \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Borel-messbare Funktion. Wir definieren für $x \in U$*

$$u(x) := \mathbf{E}^x[\phi(W_T)], \text{ wobei } T = \inf\{t \geq 0 : W_t \in \partial U\}$$

und (W_t) ein multivariater Wienerprozess ist. Es folgt, dass für eine Kugel $B(x,r) \subset U$:

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,\mathrm{d}\sigma(u),$$

wobei σ das normierte Haarmaß (oder Hausdorff Maß der Dimension $d-1$) auf $\partial B(x,r)$ ist.

4.4 Die starke Markov Eigenschaft für allgemeine Markov-Familien

Wir betrachten nun eine allgemeine Markov-Familie $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \{\mathbf{P}^x : x \in \mathbb{R}^d\}, X)$. Wir assoziieren die Markov-Familie mit einer Familie $\{U_t : t \geq 0\}$ von Operatoren, die die Menge Υ der beschränkten Borel-messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ wieder in sich selbst abbilden:

$$U_t : \Upsilon \to \Upsilon, (U_t f)(x) = \mathbf{E}^x[f(X_t)].$$

Satz 4.14. *Es gilt für $t, s \geq 0$*

$$U_{t+s} = U_t \circ U_s,$$

die sogenannte Chapman-Kolmogorov Gleichung. D.h. $\{U_t : t \geq 0\}$ ist eine Halbgruppe.

Satz 4.15. *Eine Markov-Familie $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \{\mathbf{P}^x : x \in \mathbb{R}^d\}, X)$ besitz, die starke Markov-Eigenschaft, wenn*

- *X rechtsstetig ist und*
- *$\forall t \geq 0$: U_t stetige Funktionen mit kompaktem Träger wieder auf stetige Funktionen abbildet.*

Bemerkung 4.16. Auch aus diesem Ergebnis folgt die starke Markov Eigenschaft der kanonischen Markov-Familie des Wienerprozesses, da für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ wegen des majorisierten Konvergenzsatzes

$$U_t f(x_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|y-x_n|^2}{2}} f(y)\,\mathrm{d}y \to \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|y-x|^2}{2}} f(y)\,\mathrm{d}y = U_t f(y).$$

Es gilt sogar noch mehr. Für jede Funktion $f \in \Upsilon$ und $t > 0$ ist $U_t f$ ∞-oft partiell differenzierbar.

5 Zusammenhänge mit partiellen Differentialgleichungen

5.1 Das Dirichlet Problem

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes beschränktes Gebiet und

$$\phi : \partial U \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Eine Funktion $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$, die

- zweimal stetig differenzierbar in U und
- stetig in $\bar{U}$ ist,

heißt Lösung des *Dirichlet Problems* auf U mit Randbedingung ϕ, wenn

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \forall x \in U \\ u(x) = \phi(x) & \forall x \in \partial U \end{cases}$$

wobei $\Delta u = \sum_{i=1}^d \partial_{ii}$ den Laplaceoperator bezeichnet.

Bemerkung 5.1. Wenn $\bar{U}$ einen homogenenen Körper darstellt an dem am Rand ∂U eine Spannung ϕ angelegt ist, dann stellt die Lösung des Dirichletproblems den Spannungsverlauf im Körper dar.

Satz 5.2. *Sei u eine Lösung des Dirichletproblems auf $\bar{U}$ mit Randwert ϕ. Dann gilt für $x \in U$*

$$u(x) = \mathbf{E}^x[\phi(W_T)],$$

wobei $T := \inf\{t \geq 0 : W_t \in \partial U\}$. Insbesondere ist die Lösung eindeutig.

Korollar 5.3. *Für eine harmonische Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ (d.h. $\Delta u = 0$), $x \in U$ und $r > 0$ mit $B(x,r) \subset U$ gilt*

$$u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, \sigma(\mathrm{d}y).$$

Satz 5.4. *Für $d \geq 3$ erfüllt der d-dimensionale Wienerprozess W*

$$|W_t| \to \infty, \quad \textit{fast sicher.}$$

Satz 5.5. *Für den Wienerprozess W in $\mathbb{R}^2$ und $x \in \mathbb{R}^2$ existieren fast sicher endliche Stoppzeiten (T_n^x) mit*

- $T_n^x \to \infty$
- $W_{T_n^x} \to x$

5.2 Das Poisson Problem

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes beschränktes Gebiet und

$$\phi : U \to \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Eine Funktion $u : \bar{U} \to \mathbb{R}$, die

- zweimal stetig differenzierbar in U und
- stetig in $\bar{U}$ ist,

heißt Lösung des *Poisson Problems* auf U mit Potential ϕ, wenn

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u(x) = -\phi(x) & \forall x \in U \\ u(x) = 0 & \forall x \in \partial U. \end{cases}$$

Satz 5.6. *Sei u eine Lösung des Poisson Problems auf $\bar{U}$ mit* uniform beschränktem *Potential ϕ. Dann gilt für $x \in U$*

$$u(x) = \mathbf{E}^x[\int_0^T \phi(W_s)\,\mathrm{d}s],$$

wobei $T := \inf\{t \geq 0 : W_t \in \partial U\}$. Insbesondere ist die Lösung eindeutig.

Bemerkung 5.7. Für $\phi = 1$ erhält man

$$u(x) = \mathbf{E}^x[T].$$

Lemma 5.8. *Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ eine beschränkte offene Menge. Dann gilt für $x \in U$ und $T = \inf\{t \geq 0 : W_t \in \partial U\}$*

$$\mathbf{E}^x[T^p] < \infty$$

für alle $p > 0$.

5.3 Die Feynman-Kac Formel

Seien $\phi : (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Eine Funktion $u : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, die

- zweimal stetig differenzierbar in $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ und
- stetig in $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ ist,

heißt Lösung der *Wärmeleitungsgleichung* mit Randwert g und Potential ϕ, wenn

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \frac{1}{2}\Delta u(x) - \phi(t, x)\, u(t, x) & \forall t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u\big|_{t=0} = g. \end{cases}$$

Satz 5.9 (Feynman-Kac Formel). *Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit nach oben beschränktem Potential ϕ und Poisson Problems auf $\bar{U}$ mit* uniform beschränktem *Potential ϕ. Dann gilt für $x \in U$*

$$u(x) = \mathbf{E}^x[\int_0^T \phi(W_s)\,\mathrm{d}s],$$

wobei $T := \inf\{t \geq 0 : W_t \in \partial U\}$. Insbesondere ist die Lösung eindeutig.

6 Stochastische Differentialgleichungen

Wir betrachten in diesem Kapitel stochastische Differentialgleichungen der Form

$$\mathrm{d}X_t = A(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t + b(t, X_t)\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

auf einem festen Zeitintervall $[0, T]$, wobei

- W ein n-dimensionaler $(\mathcal{F}_t)$-Wienerprozess ist,
- $A = (a_{i,j})_{i=1,\dots m, j=1,\dots,n} : [0, T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times n}$ (*Dispersionsmatrix*) und
- $b : [0, T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (*Driftvektor*) stetige Abbildungen sind.

Als potentielle Lösungen betrachten wir m-dimensionale stetige Semimartingale X für die die stochastischen Integrale wohldefiniert sind.

Zur Durchführung von Existenz und Eindeutigkeitsbeweisen benötigen wir *Regularitätsannahmen.* Wir werden die sogenannte Lipschitzbedingung voraussetzen.

Definition 6.1. Die Funktionen A und b erfüllen die *Lipschitzbedingung*, wenn es eine endliche Konstante K gibt, sodass für alle $t \in [0, T]$ und $x, y \in \mathbb{R}^m$

$$\|A(t, x) - A(t, y)\| \vee |b(t, x) - b(t, y)| \le K\,|x - y|$$

und

$$\|A(t, x)\| \vee |b(t, x)| \le K(1 + |x|^2)^{1/2}.$$

gelten. Hierbei bezeichne $\|Q\|$ für eine Matrix Q die Frobenius-Norm, d.h.

$$\|Q\| = \Big(\sum_{i,j} q_{i,j}^2\Big)^{1/2}.$$

Der Wahl der Frobenius-Norm ist durch folgendes Lemma motiviert:

Lemma 6.2 (Itô-Isometrie für den multivariaten Wienerprozess)**.** *Es gilt für einen n-dimensionalen Wienerprozess (W_t), einen integrierbaren $\mathbb{R}^{m\times n}$-wertigen Prozess (A_t) und $t \ge 0$*

$$\mathbf{E}\Big[\Big|\int_0^t A_s\,\mathrm{d}W_s\Big|^2\Big] \le \mathbf{E}\Big[\int_0^t \|A_s\|^2\,\mathrm{d}s\Big].$$

Im Falle der Endlichkeit der rechten Seite gilt sogar Gleichheit. Ferner gilt

$$\mathbf{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]}\Big|\int_0^s A_u\,\mathrm{d}W_u\Big|^2\Big] \le 4\mathbf{E}\Big[\int_0^t \|A_s\|^2\,\mathrm{d}s\Big].$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $Y^{(i)}$ die i-te Komponente von $\int_0^t A_s\,\mathrm{d}W_s$ und bemerken, dass

$$\langle Y^{(i)}\rangle_t = \Big\langle\sum_{j=1}^n \int_0^t A_s^{i,j}\,\mathrm{d}W_s^j\Big\rangle_t = \int_0^t \sum_{j=1}^n (A_s^{i,j})^2\,\mathrm{d}s.$$

Somit gilt

$$\mathbf{E}\Big[\big|\int_0^t A_s \,\mathrm{d}W_s\big|^2\Big] = \sum_{i=1}^m \underbrace{\mathbf{E}[(Y_t^{(i)})^2]}_{\le \mathbf{E}[\langle Y^{(i)}\rangle_t]} \le \mathbf{E}\Big[\int_0^t \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (A_s^{i,j})^2 \,\mathrm{d}s\Big] = \mathbf{E}\big[\int_0^t \|A_s\|^2 \,\mathrm{d}s\big]$$

mit Gleicheit, wenn die rechte Seite endlich ist. Ferner impliziert die Endlichkeit der rechten Seite, dass das Integral ein Martingal und damit $|\int_0^\cdot A_s \,\mathrm{d}W_s|$ ein Submartingal ist. Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus einer Anwendung der Doobschen Submartingalungleichung. □

Satz 6.3. *Unter den Lipschitzbedingungen besitzt die SDE (5) eine eindeutige Lösung mit Startwert $X_0 = \xi$ für jede quadratinterierbare $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsvariable ξ.*

Im Beweis werden wir die Lösung als Limes einer Folge von Prozessen konstruieren. Die hierbei genutzte Topologie soll nun eingeführt werden. Wir setzen

$$\mathcal{L}^{2,\sup} := \big\{X = (X_t)_{t\in[0,T]} : X \text{ ist stetig und } (\mathcal{F}_t)\text{-adaptiert mit } \mathbf{E}[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2] < \infty\big\}.$$

und versehen die Menge mit der Halbnorm

$$\|X\|_{2,\sup} = \mathbf{E}[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2]^{1/2}.$$

Die Menge

$$L^{2,\sup} := \mathcal{L}^{2,\sup}/\text{Ununterscheidbarkeit}$$

versehen mit $\|\cdot\|_{2,\sup}$ ist ein Banachraum.

Beweis. Im Beweis verwenden wir eine Picard-Lindelöf Iteration: Wir definieren induktiv eine Familie $\{X^{(k)} : k \in \mathbb{N}_0\}$ von stochastischen Prozessen durch $X_t^{(0)} = \xi$ und

$$X_t^{(k+1)} = \xi + \int_0^t A(s, X_s^{(k)}) \,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X_s^{(k)}) \,\mathrm{d}s.$$

Per Induktion sieht man direkt, dass $X^{(k)}$ wohldefiniert und stetig ist, da die Integranden nach der Induktionsannahme jeweils lokal beschränkt sind.

Schritt 1: Zunächst zeigen wir induktiv, dass für $C_0 = 3[1 \vee [(T+4)TK^2] \vee [(T+4)K^2]$

$$\mathbf{E}[\sup_{s\in[0,t]} |X_s^{(k)}|^2] \le C_0(1 + \mathbf{E}[|\xi|^2])\big(1 + C_0 t + \dots + \frac{1}{k!}(C_0 t)^k\big)$$

gilt. Die Induktionsannahme ist klar und wir zeigen direkt, dass die Gültigkeit für $k \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit für $k+1$ impliziert. Da $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2)$ für $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt erhalten wir

$$\mathbf{E}[\sup_{s\in[0,t]} |X_s^{(k+1)}|^2] \le 3\mathbf{E}[|\xi|^2] + 3\mathbf{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]}\Big|\int_0^s A(u, X_u^{(k)}) \,\mathrm{d}W_u\Big|^2\Big] + 3\mathbf{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]}\Big|\int_0^s b(u, X_u^{(k)}) \,\mathrm{d}u\Big|^2\Big].$$

Wir schätzen den zweiten Term mittels der Itô-Isometrie und der Doob Ungleichung ab

$$\mathbf{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]}\Big|\int_0^s A(u, X_u^{(k)}) \,\mathrm{d}W_u\Big|^2\Big] \le 4\mathbf{E}\Big[\Big|\int_0^t \|A(s, X_s^{(k)})\|^2 \,\mathrm{d}s\Big] \le 4K^2 \int_0^t \mathbf{E}\big[|X_s^{(k)}|^2 + 1\big] \,\mathrm{d}s$$

und den dritten Term mittels Cauchy-Schwarz

$$\mathbf{E}\Big[\sup_{s\in[0,t]}\Big|\int_0^s 1\, b(u,X_u^{(k)})\,\mathrm{d}s\Big|^2\Big] \le t\int_0^t \mathbf{E}[|b(s,X_s^{(k)})|^2]\,\mathrm{d}s \le TK^2\int_0^t \mathbf{E}\big[|X_s^{(k)}|^2+1\big]\,\mathrm{d}s.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(k+1)}|^2] &\le 3\mathbf{E}[|\xi|^2]+3(T+4)K^2\Big[\int_0^t \mathbf{E}\big[|X_s^{(k)}|^2\big]\,\mathrm{d}s+T\Big]\\ &\le C_0\,(1+\mathbf{E}[|\xi|^2])+C_0\int_0^t \mathbf{E}\big[|X_s^{(k)}|^2\big]\,\mathrm{d}s\\ &\le C_0\,(1+\mathbf{E}[|\xi|^2])+C_0^2(1+\mathbf{E}[|\xi|^2])\int_0^t\big(1+C_0s+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}(C_0t)^{k-1}\big)\,\mathrm{d}s\\ &= C_0(1+\mathbf{E}[|\xi|^2])\big(1+C_0t+\cdots+\frac{1}{k!}(C_0t)^k\big).\end{aligned}$$

Es folgt, dass für alle $k\in\mathbb{N}_0$ und $t\in[0,T]$

$$\mathbf{E}[\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(k)}|^2]\le C(1+\mathbf{E}[|\xi|^2])\quad\text{mit}\quad C=C_0e^{C_0}.$$

gilt. Insbesondere, ist jeder Prozess $X^{(k)}$ in $L^{2,\sup}$.

Schritt 2: Im zweiten Schritt zeigen wir, dass $\{X^{(k)}:k\in\mathbb{N}_0\}$ eine Cauchy-Folge in $L^{2,\sup}$ ist. Wir vergleichen nun $X^{(k+1)}$ mit $X^{(k)}$ für ein festes $k\in\mathbb{N}$:

$$X_t^{(k+1)}-X_t^{(k)}=\underbrace{\int_0^t(A(s,X_s^{(k)})-A(s,X_s^{(k-1)}))\mathrm{d}W_s}_{=:M_t}+\underbrace{\int_0^t(b(s,X_s^{(k)})-b(s,X_s^{(k-1)}))\mathrm{d}s}_{=:B_t}.$$

Für das lokale Martingal (M_t) erhalten wir mittels der Doob-Ungleichung

$$\mathbf{E}[\sup_{s\in[0,t]}|M_s|^2]\le 4\int_0^t\|A(s,X_s^{(k)})-A(s,X_s^{(k-1)})\|^2\mathrm{d}s\le 4K^2\int_0^t\mathbf{E}[|X_s^{(k)}-X_s^{(k-1)}|^2]\,\mathrm{d}s.$$

Weiterhin folgt wieder mittels Cauchy-Schwarz

$$|B_t|^2\le t\int_0^t|b(s,X_s^{(k)})-b(s,X_s^{(k-1)})|^2\,\mathrm{d}s\le K^2T\int_0^t|X_s^{(k)}-X_s^{(k-1)}|^2\,\mathrm{d}s.$$

Insgesamt folgt also

$$e^k(t):=\mathbf{E}[\sup_{s\in[0,t]}|X_s^{(k+1)}-X_s^{(k)}|^2]\le\underbrace{(4+T)K^2}_{=:C_1}\int_0^t\underbrace{\mathbf{E}[|X_s^{(k)}-X_s^{(k-1)}|^2]}_{\le e^{k-1}(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Mittels Iterationen erhalten wir

$$\begin{aligned}e^k(t)&\le C_1\int_0^t e^{k-1}(s_1)\,\mathrm{d}s_1\le C_1^2\int_0^t\int_0^{s_1}e^{k-2}(s_2)\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1\\ \ldots&\le C_1^k\int_0^t\cdots\int_0^{s_{k-1}}\underbrace{e^0(s_k)}_{\le e^0(T)}\,\mathrm{d}s_k\ldots\mathrm{d}s_1\le e^0(T)\frac{(C_1t)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Da

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_{2,\sup} \le \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{e^0(T)\frac{(C_1T)^k}{k!}} < \infty,$$

ist $\{X^{(k)} : k \in \mathbb{N}_0\}$ eine Cauchy-Folge in $L^{2,\sup}$. (Man sieht auerdem leicht, dass $\{X^{(k)} : k \in \mathbb{N}_0\}$ fast sicher eine $C[0,T]$-Cauchy Folge ist.)

3. Schritt: Wir wählen X als $L^{2,\sup}$-Limes der Folge $\{X^{(k)} : k \in \mathbb{N}_0\}$ und erhalten

$$X_t \longleftarrow X_t^{(k+1)} = \xi + \int_0^t A(s, X_s^{(k)})\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X_s^{(k)})\,\mathrm{d}s \longrightarrow \int_0^t A(s, X_s)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s,$$

da analog zu obiger Rechnung

$$\mathbf{E}\Big|\int_0^t (A(s,X_s^{(k)}) - A(s,X_s))\,\mathrm{d}W_s\Big| \le \mathbf{E}\int_0^t \|A(s,X_s^{(k)}) - A(s,X_s)\|^2\,\mathrm{d}s \le K^2\int_0^t \mathbf{E}[|X_s^{(k)} - X_s|^2]\,\mathrm{d}s \to 0$$

und entsprechend

$$\mathbf{E}\Big|\int_0^t (b(s,X_s^{(k)}) - b(s,X_s))\,\mathrm{d}s\Big| \le TK^2\int_0^t \mathbf{E}[|X_s^{(k)} - X_s|^2]\,\mathrm{d}s \to 0.$$

Schritt 4: Es verbleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Angenommen es gäbe eine weitere Lösung (Y_t). Wir wenden die Abschätzungen aus Schritt 2 an (wobei $X^{(k+1)}$ als X und $X^{(k)}$ als Y gewählt werden) und erhalten für die Stoppzeit $T_l = \int\{t \ge 0 : |X_t - Y_t| \ge l\}$ $(l \in \mathbb{N})$

$$e_l(t) := \mathbf{E}[\sup_{s\in[0,t\wedge T_l]} |X_s - Y_s|^2] \le C_1 \int_0^{t\wedge T_l} \underbrace{\mathbf{E}[|X_s - Y_s|^2]}_{\le e_l(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Mit dem Gronwal Lemma folgt $e_l(T) = 0$. Da $(T^l : l \in \mathbb{N})$ eine Lokalisierungsfolge ist, folgt die Eindeutigkeit. □

Korollar 6.4. *Es gelte die Lipschitzbedingung für A und b. Dann existiert für jede $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsvariable ξ genau eine Lösung der SDE*

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = A(t,X_t)\,\mathrm{d}W_t + b(t,X_t)\,\mathrm{d}t \\ X_0 = \xi \end{cases}$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $X^{(k)}$ die eindeutige Lösung mit Startwert $\xi_k := \mathbb{1}_{\{|\xi|\le k\}}\xi$. Dann folgt für $1 \le k \le l$

$$\sup_{s\in[0,T]} |X_s^{(l)} - X_s^{(k)}| = 0 \quad \text{f.s. auf } \{|\xi| \le k\}.$$

und $X = \lim_{k\to\infty} X^{(k)}$ ist die eindeutige Lösung. Beweis wie Eindeutigkeitsbeweis zuvor mit

$$e(t) = \mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{|\xi|\le K\}} \sup_{s\in[0,t]} |X_s^{(k)} - X_s^{(l)}|^2].$$

□

Bemerkung 6.5. Sei $(\mathcal{F}_t^0)$, die kleinste Filtration, die den üblichen Bedingungen genügt und für die ξ $\mathcal{F}_0^0$-messbar ist und (W_t) $(\mathcal{F}_t^0)$-adaptiert ist, d.h. die Augmentierung von

$$(\mathcal{F}_t^W \vee \sigma(\xi))_{t\geq 0}.$$

Nach Konstruktion ist die Lösung (X_t) bzgl. dieser Filtration adaptiert.

Definition 6.6.

- Wir nennen eine Lösung (X_t) eine *starke Lösung* der SDE (5) (beschrieben durch A und b), wenn sie $(\mathcal{F}_t^0)$-adaptiert ist.
- Die SDE (5) heißt *im starken Sinne eindeutig lösbar*, wenn für einen Wienerprozess (W_t) und eine unabhängige Startvariable ξ (wie oben) gerade gilt:

$$X \text{ und } Y \text{ sind } (\mathcal{F}_t^0)\text{-adaptierte Lösungen von (5) mit Startwert } \xi$$
$$\implies X \text{ und } Y \text{ sind ununterscheidbar}$$

Wir haben im obigen Satz also Existenz und Eindeutigkeit einer starken Lösung gezeigt. Als Ausblick betrachten wir einen alternativen Lösungsbegriff, den der *schwachen* Lösung.

Definition 6.7. Gegeben

- $A : [0,\infty) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times n}$ Borel messbar
- $b : [0,\infty) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ Borel messbar und
- μ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^m$ (Startverteilung)

heißt ein Paar (X, W) zusammen mit einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ schwache Lösung obiger SDE, wenn

- W ein n-dimensionaler $(\mathcal{F}_t)$-Wienerprozess,
- $\mathbf{P} \circ X_0^{-1} = \mu$ und
- $X \in \mathcal{S}$ mit
$$X_t = X_0 + \int_0^t A(X_t)\, \mathrm{d}W_s + \int_0^t b(X_s)\, \mathrm{d}s \quad \text{für } t \geq 0$$

gelten.

Bemerkung 6.8. Da A und b in obiger Definition nicht mehr stetig sind, benötigt man eine Integrationstheorie für allgemeinere Integranden als previsible Prozesse. Es lässt sich leicht zeigen, dass unser Intgralbegriff auch für progressiv messare Integranden anwendbar ist.

7 Maßwechsel und Darstellungssätze

7.1 Die Girsanov Transformation

Definition 7.1. Wir nennen ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q}$ *lokal absolutstetig bezüglich* $\mathbf{P}$, wenn für alle $t \geq 0$

$$\mathbf{Q}\big|_{\mathcal{F}_t} \ll \mathbf{P}\big|_{\mathcal{F}_t}$$

gilt. Kurz schreiben wir hierfür $\mathbf{Q} \ll_{\mathrm{loc}} \mathbf{P}$.

Wir nehmen im Folgenden an, dass $\mathbf{Q} \ll_{\mathrm{loc}} \mathbf{P}$ gilt und, dass es eine stetige Version (Z_t), der Radon-Nikodym Dichten

$$Z_t = \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} \quad \text{(Dichteprozess)}$$

gibt. Wir bezeichnen mit $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{loc}}$ die Menge der lokalen $\mathbf{Q}$-Martingale.

Frage: Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\mathcal{M}^{\mathrm{loc}}$ und $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{loc}}$?

Zur Beantwortung der Frage ist folgendes Lemma zentral.

Lemma 7.2. *Sei X ein stetiger adaptierter Prozess mit $X_0 = 0$. Es gilt*

$$X \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{loc}} \quad \Longleftrightarrow \quad XZ \in \mathcal{M}^{\mathrm{loc}}.$$

Wir nehmen nun an, dass für ein Semimartingal $L \in \mathcal{M}^{\mathrm{loc}}$ gerade $Z = \mathcal{E}(L)$ gilt. D.h. man hat

$$\mathrm{d}Z_t = Z_t\,\mathrm{d}L_t.$$

Sei nun $X = M + A \in \mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}} \oplus \mathcal{A}_0$. Wir formen nun die Bedingung $X \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{loc}}$ äquivalent um:

$$\begin{aligned}
X \in \widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{loc}} &\Longleftrightarrow XZ \in \mathcal{M}^{\mathrm{loc}} \Longleftrightarrow \mathrm{d}(XZ)_t \in \mathrm{d}\mathcal{M}^{\mathrm{loc}} \\
&\Longleftrightarrow Z_t\,\mathrm{d}X_t + \underbrace{X_t\,\mathrm{d}Z_t}_{\in \mathrm{d}\mathcal{M}^{\mathrm{loc}}} + \mathrm{d}\langle X, Z\rangle_t \in \mathrm{d}\mathcal{M}^{\mathrm{loc}} \\
&\Longleftrightarrow \underbrace{Z_t\,\mathrm{d}M_t}_{\in \mathrm{d}\mathcal{M}^{\mathrm{loc}}} + Z_t\,\mathrm{d}A_t + \underbrace{\mathrm{d}\langle X, Z\rangle_t}_{= Z_t\,\mathrm{d}\langle X, L\rangle_t} \in \mathrm{d}\mathcal{M}^{\mathrm{loc}} \qquad (6) \\
&\Longleftrightarrow Z_t\,\mathrm{d}(A + \langle X, L\rangle)_t = 0 \\
&\Longleftrightarrow A_t = -\langle M, L\rangle_t \;\text{ für alle } t \geq 0.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir genutzt, dass wir den lokal beschränkten Prozess $\frac{1}{Z_t}$ bzgl. dem Itô-Differential integrieren können. Wir bemerken insbesondere, dass die obige Darstellung $Z = \mathcal{E}(L)$ impliziert, dass $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ lokal äquivalente Maße sind (kurz $\mathbf{P} \sim_{\mathrm{loc}} \mathbf{Q}$).

Wir betrachten nun den Fall, dass $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ nicht lokal äquivalent sind. Die Definition des Prozesses L ist nun technisch etwas schwieriger. Wir setzen

$$\tau_n := n \wedge \inf\{t \geq 0 : Z_t \leq 1/n\} \quad \text{und} \quad \tau := \sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$$

und

$$L_t^{(n)} = \log Z_0 + \int_0^{t \wedge \tau_n} \frac{1}{Z_s}\,\mathrm{d}Z_s.$$

Nun ist $L = (L_t)_{t\in[0,\tau)}$ beschrieben durch

$$L^{\tau_n} = L^{(n)}$$

ein lokales Martingal. Kurz schreibt man auch

$$L_t = \int_0^t \frac{1}{Z_s}\,\mathrm{d}Z_s \qquad (t \in [0,\tau)).$$

Nun gilt $\mathcal{E}(L) = Z$ auf $[0,\tau)$. Ferner ist $\mathbf{Q}(\tau = \infty) = 1$, da für alle $t \geq 0$

$$\min_{s\in[0,t]} Z_s > 0$$

gilt. Die letztere Aussage ist gültig, da (Z_t) als nicht-negatives $\mathbf{P}$-Martingal, die 0 nicht mehr verlässt nach der ersten Berührung und $\int \mathbb{1}_{\{Z_t=0\}}\,\mathrm{d}\mathbf{Q} = \int \mathbb{1}_{\{Z_t=0\}} Z_t\,\mathrm{d}\mathbf{P} = 0$ ist.

Satz 7.3. *Seien $\mathbf{Q} \ll_{\text{loc}} \mathbf{P}$ und L wie oben. Dann ist für $M \in \mathcal{M}_0^{\text{loc}}$*

$$M - \langle M, L\rangle$$

ein lokales $\mathbf{Q}$-Martingal.

Bemerkung 7.4. In dem Satz ist der Prozess $\langle M, L\rangle$ nur auf $[0,\tau)$ definiert. Da wir den Prozess bezüglich des Maßes $\mathbf{Q}$ betrachten, macht diese Einschränkung nichts (zur Erinnerung: $\tau = \infty$, $\mathbf{Q}$-fast sicher).

Korollar 7.5. *Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{P}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum gilt*

$$\mathbf{Q} \ll_{\text{loc}} \mathbf{P} \implies \mathcal{S}^{\mathbf{Q}} \supset \mathcal{S}^{\mathbf{P}}$$

und

$$\mathbf{Q} \sim_{\text{loc}} \mathbf{P} \implies \mathcal{S}^{\mathbf{Q}} = \mathcal{S}^{\mathbf{P}}$$

für die zugehörigen Semimartingalräume.

Beweis. Wir bemerken, dass Z^{τ_n} der Dichteprozess von $\mathbf{Q}$ nach $\mathbf{P}$ bezüglich der Filtration $\mathcal{F}^{(n)} := (\mathcal{F}_{t\wedge\tau_n})$ ist, wobei die Stoppzeiten (τ_n) wie oben definiert sind. Für $m \geq n$ ist M^{τ_n} ein $(\mathcal{F}_t^{(m)})$-adaptiertes lokales Martingal bzgl. $\mathbf{P}$ und es folgt mit (6), dass

$$(M - \langle L, M\rangle)^{\tau_n}$$

ein lokales $\mathbf{Q}$-Martingal bezüglich $\mathcal{F}^{(m)}$ ist. Wir überprüfen nun, dass $M - \langle L, M\rangle$ ein lokales $(\mathcal{F}_t)$-Martingal ist. Sei T eine Stoppzeit, sodass der T-gestoppte Prozess uniform beschränkt ist. Zunächst sehen wir, dass

$$(M - \langle L, M\rangle)_s^{T\wedge\tau_n} = \mathbf{E}[(M - \langle L, M\rangle)_t^{T\wedge\tau_n} | \mathcal{F}_s^{(m)}] \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}[(M - \langle L, M\rangle)_t^{T\wedge\tau_n} | \widetilde{\mathcal{F}}_s]$$

für $\widetilde{\mathcal{F}}_s := \bigvee \mathcal{F}_s^{(m)}$. Ferner ist für $A \in \mathcal{F}_s$

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(A \cap \{\tau_n > s\}\right)}_{\in \mathcal{F}_s^{(n)} \subset \widetilde{\mathcal{F}}_s} \cup \underbrace{\left(A \cap \{\tau \leq s\}\right)}_{\mathbf{Q}\text{ N.M.}}$$

Es folgt

$$\int_A (M - \langle L, M\rangle)_t^{T\wedge\tau_n} \,\mathrm{d}\mathbf{Q} = \int_A (M - \langle L, M\rangle)_s^{T\wedge\tau_n} \,\mathrm{d}\mathbf{Q}.$$

Somit ist $(M - \langle L, M\rangle)^T$ ein lokales $\mathbf{Q}$-Martingal. □

Häufig möchte man für gegebenes $L \in \mathcal{M}^{\mathrm{loc}}$ ein Maß $\mathbf{Q}$ durch die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{E}(L)_t =: Z_t$$

definieren. Damit dies möglich ist, muss (Z_t) ein Martingal mit $\mathbf{E}[Z_0] = 1$ sein. Dies reicht aber nicht aus! Ein entsprechendes Maß $\mathbf{Q}$ existiert, wenn zuätzlich

i) (Z_t) ein ggi Martingal ist; dann kann man $\mathbf{Q}$ mittels

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A Z_\infty \,\mathrm{d}\mathbf{P}$$

definieren.

ii) der filtrierte Raum die Anwendung des Kolmogorovschen Fortsetzungssatzes erlaubt; in der Tat wird durch

$$\mathbf{Q}_n(A) = \int_A Z_n \,\mathrm{d}\mathbf{P} \qquad (A \in \mathcal{F}_n)$$

eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mathbf{Q}_n)$ auf den σ-Algebren $(\mathcal{F}_n)$ definiert und die Existenz einer Maßfortsetzung $\mathbf{Q}$ auf $\mathcal{F}_\infty$ kann unter entsprechenden Voraussetzungen mithilfe des Kolmogorovschen Maßfortsetzungssatzes gezeigt werden.

Bevor wir hinreichende Bedingung für die Martingaleigenschaft von $\mathcal{E}(L)$ herleiten, soll zunächst die Nützlichkeit der Girsanov-Transformation an einem Beispiel aufgezeigt werden.

Beispiel 7.6. Wir betrachten die SDE

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \mathrm{d}W_t + b(t, X_t)\,\mathrm{d}t \\ X_0 = x \end{cases}$$

auf $[0, T]$ für eine stetige Funktion $b : [0, T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ und einen m-dimensionalen Wienerprozess W.

Ziel: Konstruktion einer schwachen Lösung.

Sei zunächst (X_t) ein Wienerprozess unter dem Maß $\mathbf{P}$ und betrachte

$$L_t = \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}X_s.$$

Wir nehmen an, dass $\mathcal{E}(L)$ ein Martingal ist. Dann definieren wir $\mathbf{Q}$ mittels

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A \mathcal{E}(L)_T \,\mathrm{d}\mathbf{P}.$$

Unter $\mathbf{Q}$ ist nun für $i = 1, \dots, m$

$$X_t^{(i)} - \langle X^{(i)}, L\rangle_t = X_t^{(i)} - \int_0^t b_i(s, X_s)\,\mathrm{d}s =: x_i + W_t^{(i)}$$

ein lokales $\mathbf{Q}$-Martingal mit

$$\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_t = \delta_{ij} t.$$

D.h. W ist unter $\mathbf{Q}$ ein Wienerprozess und es gilt

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s + W_t.$$

Wir haben somit bewiesen, dass aus der Martingaleigenschaft von $\mathcal{E}(L)$ die Existenz einer Lösung obiger SDE im schwachen Sinne folgt.

Es stellt sich die Frage unter welchen Bedingungen $(\mathcal{E}(L)_t)$ für gegebenes $L \in \mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}$ ein echtes Martingal ist.

Proposition 7.7 (Kazamaki's Kriterium). *Ist $L \in \mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}$ und $Z := (\exp\{\frac{1}{2}L_t\})_{t\geq 0}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal so ist $\mathcal{E}(L)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal.*

Im Beweis nutzen wir, dass für ein lokales Martingal (M_t):

$$(M_t) \text{ ist ggi Martingal} \iff \{M_T : T \text{ beschränkte Stoppzeit}\} \text{ ist ggi.}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für festgehaltenes $a \in (0,1)$ der Prozess $\mathcal{E}(aL)$ ein uniform integrierbares Martingal ist. Es gilt

$$\mathcal{E}(aL)_t = \exp\{aL_t - \frac{1}{2}a^2\langle L\rangle_t\} = \mathcal{E}(L)_t^{a^2}(Z_t^{(a)})^{1-a^2},$$

wobei $Z_t^{(a)} := \exp\{\frac{a}{1+a}L_t\}$. Wir bemerken, dass $\frac{a}{1+a} \leq \frac{1}{2}$, sodass $Z_t^{(a)} \leq Z_t + e$. Der Stoppsatz angewandt auf das gleichgradig integrierbare Submartingal (Z_t) liefert die gleichgradige Integrierbarkeit der Familie $\{Z_T : T \text{ beschränkte Stoppzeit}\}$. Für ein Ereignis $\Gamma \in \mathcal{F}$ folgt mittels der Hölder Ungleichung mit $p = \frac{1}{a^2}$ und $q = \frac{1}{1-a^2}$

$$\mathbf{E}[\mathbb{1}_\Gamma \mathcal{E}(aL)_T] \leq \mathbf{E}[\mathcal{E}(L)_T]^{a^2}\,\mathbf{E}[\mathbb{1}_\Gamma Z_T^{(a)}]^{1-a^2} \leq \mathbf{E}[\mathbb{1}_\Gamma Z_T^{(a)}]^{1-a^2}$$

Somit ist $\mathcal{E}(aL)$ ein gleichgradig integrierbares Martingal und es folgt

$$1 = \mathcal{E}(aL)_\infty \leq \mathbf{E}[\mathcal{E}(L)_\infty]^{a^2}\,\mathbf{E}[Z_\infty^{(a)}]^{1-a^2}$$

Mittels majorisierter Konvergenz folgert man nun, dass $\lim_{a\uparrow 1}\mathbf{E}[Z_\infty^{(a)}] = \mathbf{E}[\exp\{\frac{1}{2}L_\infty\}]$. Somit ist $\mathcal{E}(L)_\infty \geq 1$ und $\mathcal{E}(L)$ ein echtes Martingal. □

Proposition 7.8 (Novikov Kriterium). *Ist $L \in \mathcal{M}_0^{\mathrm{loc}}$ mit*

$$\mathbf{E}[\exp\{\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty\}] < \infty,$$

so ist $\mathcal{E}(L)$ ein gleichgradig integrierbares Maartingal.

Beweis. Wir überprüfen Kazamaki's Kriterium. Aus der Annahme folgt insbesondere, dass $\mathbf{E}[\langle L\rangle_\infty] < \infty$, d.h. $L \in \mathcal{H}^2$. Da

$$\exp\{\frac{1}{2}L_\infty\} = \mathcal{E}(L)_\infty^{1/2} \exp\{\frac{1}{4}\langle L\rangle_\infty\}$$

folgt mittels Cauchy-Schwarz

$$\mathbf{E}\big[\exp\{\frac{1}{2}L_\infty\}\big] \leq \underbrace{\mathbf{E}[\mathcal{E}(L)_\infty]^{1/2}}_{\leq 1} \mathbf{E}\big[\exp\{\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty\}\big] < \infty.$$

Es folgt mittels Jensen aus $L \in \mathcal{H}^2$, dass $(\exp\{\frac{1}{2}L_t\})_{t\geq 0}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal ist. □

Korollar 7.9. *Sei $b : [0,T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ stetig. Gilt für einen m-dimensionalen Wienerprozess (W_t)*

$$\mathbf{E}\Big[\exp\Big\{\frac{1}{2}\int_0^T |b(s, x + W_s)|^2 \,\mathrm{d}s\Big\}\Big] < \infty.$$

so besitzt die SDE

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \mathrm{d}W_t + b(t, X_t)\,\mathrm{d}t \\ X_0 = x \end{cases}$$

eine schwache Lösung.

Beweis. Wegen Beispiel 7.6 ist nur noch die Martingaleigenschaft von $\mathcal{E}(L_t)$ auf $[0,T]$ für $L_t := \int_0^t b(t, x + W_s)\,\mathrm{d}W_s$ zu überprüfen. Diese ist wegen des Novikov Kriteriums erfüllt, da

$$\langle L\rangle_T = \int_0^T |b(s, x + W_s)|^2 \,\mathrm{d}s.$$

□

7.2 Der Martingaldarstellungssatz

Sei $W = (W^{(1)}, \ldots, W^{(d)})$ ein d-dimensionaler Wienerprozess. Wir bezeichnen im folgenden mit $(\mathcal{F}_t)$ die Augmentierung, der von W erzeugten Filtration $(\mathcal{F}_t^W)$ und stellen die Frage welche stetigen lokale $(\mathcal{F}_t)$-Martingale X eine Darstellung der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^\infty H_s \,\mathrm{d}W_s$$

besitzen, wobei H ein geeigneter $(\mathcal{F}_t)$-previsibler integrierbarer Prozess ist.
Wir bezeichnen mit $L^2(W)$ die $\mathbb{R}^{1\times d}$-wertigen previsiblen Prozess H mit

$$\|H\|_{L^2(W)}^2 := \mathbf{E}\Big[\int_0^\infty |H_s|^2 \,\mathrm{d}s\Big] < \infty.$$

Es gilt nun wegen der Itô-Isometrie

$$\|H \cdot W\|_{\mathcal{H}^2} = \|H\|_{L^2(W)}.$$

Zunächst suchen wir nach Darstellungen der Form

$$F = \mathbf{E}[F] + \int_0^\infty H_t \,\mathrm{d}W_t$$

für $F \in L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$.

Lemma 7.10. *Für eine Folge $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Zeiten, die dicht in $[0,\infty)$ liegt, liegt*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^2(\Omega, \mathcal{H}_n, \mathbf{P}) \text{ mit } \mathcal{H}_n = \sigma(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$$

dicht in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$.

Beweis. Sei $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zeiten, die dicht in $[0,\infty)$ liegt. Nun gilt wegen der Stetigkeit von W, dass

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n.$$

Es folgt mit dem Martingalkonvergenzsatz, dass für $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{H}_n] \to \mathbf{E}[X|\mathcal{F}_\infty] = X \text{ in } L^2(\mathbf{P}).$$

□

Lemma 7.11. *Die lineare Hülle der Zufallsvariablen*

$$\mathcal{E}(h\cdot W)_\infty = \exp\Big\{\int_0^\infty h_s \,\mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty |h_s|^2 \,\mathrm{d}s\Big\} \quad (h \in L^2([0,\infty), \mathbb{R}^{1\times d})) \tag{7}$$

liegt dicht in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$.

Beweis. Zur Vereinfachung beweisen wir nur den Fall $d = 1$. Sei L der Abschluss der linearen Hülle von Funktionen der Form (7). Dann ist L vollständig und man kann jedes Element X aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$ als Summe

$$X = X^L + G \text{ mit } X^L \in L \text{ und } G \perp L$$

darstellen. Es reicht nun zu zeigen, dass $G = 0$.

Für Zeiten $0 \le t_1 < \cdots < t_n$ betrachten wir

$$\bar{G}(\lambda) := \mathbf{E}\big[\exp\{\lambda_1 W_{t_1} + \cdots + \lambda_n W_{t_n}\} G\big] = \exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^\infty |h^n_\lambda|^2 \,\mathrm{d}s\Big)\, \mathbf{E}[\mathcal{E}(h^\lambda \cdot W)_\infty\, G] \qquad (\lambda \in \mathbb{C}^n)$$

wobei $h^\lambda \in L^2([0,T], \mathbb{R})$ geeignet zu wählen ist. Nun ist $\bar{G}|_{\mathbb{R}^n} = 0$ (wegen der Orthogonalitätsbedingung) und $\bar{G}$ ist analytisch. Wir bezeichnen $W^{(n)} := (W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ und beobachten, dass für $\theta \in \mathbb{R}^n$ insbesondere

$$G \perp \exp\{i(\theta, W^{(n)})\}.$$

Andererseits, liegt die lineare Hülle der letzteren Funktionen dicht in $L^2(\Omega, \mathcal{H}_n, \mathbf{P})$ für $\mathcal{H}_n := \sigma(W^{(n)})$ (entsprechende Approximationen kann man wie im Beweis der Charakterisierungseigenschaft der charakteristischen Funktion mittels des Weierstraßschen Approximationssatzes konstruieren), sodass

$$G \perp L^2(\Omega, \mathcal{H}_n, \mathbf{P}).$$

Mithilfe des vorhergehenden Lemmas erhält man, dass $G \perp L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$ und somit ist $G = 0$. □

Satz 7.12. *Sei $T \geq 0$ und $F \in L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$. Dann existiert genau ein previsibler Prozess $H \in L^2(W)$ mit*

$$F = \mathbf{E}[F] + \int_0^\infty H_t \, \mathrm{d}W_t$$

Bemerkung 7.13. Ist T eine Stoppzeit und F $\mathcal{F}_T$-messbar, so folgt

$$F = \mathbf{E}[F] + \int_0^T H_t \, \mathrm{d}W_t.$$

Dies gilt, da $M := (\int_0^t H_t \, \mathrm{d}W_t)_{t \geq 0}$ wegen der Itô-Isometrie in $\mathcal{H}^2$ (und insbesondere ein gleichgradig integrierbares Martingal) ist und somit wegen des Stoppsatzes

$$F = \mathbf{E}[F|\mathcal{F}_T] = \mathbf{E}[F] + \mathbf{E}[M_\infty|\mathcal{F}_T] = \mathbf{E}[F] + M_T = \mathbf{E}[F] + \int_0^T H_t \, \mathrm{d}W_t$$

gilt.

Beweis. Sei zunächst F von der Form

$$F = \mathcal{E}(h \cdot W)_\infty = \exp\Big\{ \int_0^\infty h_t \, \mathrm{d}W_t - \frac{1}{2} \int_0^\infty |h_s|^2 \, \mathrm{d}s \Big\}$$

Dann gilt für $Y_t = \mathcal{E}(h \cdot W)_t$

$$\mathrm{d}Y_t = Y_t \, \mathrm{d}(h \cdot W)_t = Y_t \, h_t \, \mathrm{d}W_t.$$

und somit

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s h_s \, \mathrm{d}W_s$$

Da $\mathbf{E}[\int_0^\infty Y_s^2 |h_s|^2 \, \mathrm{d}s] < \infty$ ist, ist $(Y_t)_{t \in [0, \infty}$ ein Martingal mit der geforderten Eigenschaft.

Zum Beweis der Aussage für eine allgemeine Funktion $F \in L^2(\mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$ verwenden wir Linearkombinationen F^n von Funktionen der Form (7) mit

$$F^n \to F \quad \text{in } L^2(\mathbf{P}).$$

Nun gilt

$$F^n = \mathbf{E}[F^n] + \int_0^\infty H_t^n \, \mathrm{d}W_t$$

für geeignete previsible Funktionen H^n. Aus der Orthogonalität der Zuwächse und der Itô-Isometrie folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(F^n - F^m)^2] &= \mathbf{E}\Big[\Big(\mathbf{E}[F^n - F^m] + \int_0^\infty (H_t^n - H_t^m)\,\mathrm{d}W_t\Big)^2\Big] \\ &= (\mathbf{E}[F^n] - \mathbf{E}[F^m])^2 + \mathbf{E}[\int_0^\infty |H_t^n - H_t^m|^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Da $(F^n : n \in \mathbb{N})$ eine $L^2(\mathbf{P})$-Cauchy Folge ist, gilt dies also auch für $(H^n : n \in \mathbb{N})$ in $L^2(W)$ und wir bezeichnen mit H den Limes. Es folgt

$$F \longleftarrow F^n = \mathbf{E}[F^n] + \int_0^\infty H_t^n\,\mathrm{d}W_t \longrightarrow \mathbf{E}[F] + \int_0^\infty H_t\,\mathrm{d}W_t.$$

Die Darstellung ist einddeutig, da für zwei Darstellungen mit $H, G \in L^2(W)$

$$0 = \mathbf{E}\Big[\int_0^\infty (H_t - G_t)\,\mathrm{d}W_t\Big] = \mathbf{E}\Big[\int_0^\infty |H_t - G_t|^2\,\mathrm{d}t\Big].$$

□

Korollar 7.14. *Die σ-Algebra $\mathcal{F}_0$ ist trivial, d.h. $\mathbf{P}(A) \in \{0,1\}$ für alle $A \in \mathcal{F}_0$.*

Beweis. Für $A \in \mathcal{F}_0$ betrachten wir $F = \mathbb{1}_A \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$. Nun gilt

$$\mathbb{1}_A = \mathbf{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[\mathbb{1}_A].$$

□

Satz 7.15. *Jedes $(\mathcal{F}_t)$-Martingal (M_t) besitzt eine stetige Modifikation.*

Beweis. Es reicht die Aussage für gleichgradig integrierbare Martingale zu zeigen (ansonsten kann die allgemeine Gültigkeit der Aussage aus der Gültigkeit für die gestoppten Martingale $\{M^n : n \in \mathbb{N}\}$ hergeleitet werden). Wir wählen $F = M_\infty$ und eine Folge von Zufallsvariablen $(F^{(n)})$ aus $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$, die in L^1 gegen F konvergiert. Wegen des vorhergehenden Satzes existiert eine stetige Version des Martingals

$$M_t^{(n)} := \mathbf{E}[F^{(n)}|\mathcal{F}_t].$$

Ferner existiert wegen Korollar 2.31 eine càdlàgVersion des Martingals (M_t), sagen wir $(\widetilde{M}_t)$. Nun folgt mittels der Doob'schen Maximalungleichung (Satz 2.27)

$$\mathbf{P}(\sup_{t\geq 0} |\widetilde{M}_t - M_t^{(n)}| \geq \lambda) \leq \lambda^{-1}\mathbf{E}[|F - F^{(n)}|].$$

Mithilfe von Borel-Cantelli kann man nun schlussfolgern, dass es eine fast sicher gleichmäßig gegen $(\widetilde{M}_t)$ konvergente Teilfolge $(M^{(n_k)})$ gibt. Somit ist $(\widetilde{M}_t)$ fast sicher stetig. □

Satz 7.16. *Sei $M \in \mathcal{M}^{\mathrm{loc}}$ und $(\mathcal{F}_t)$ und (W_t) wie zuvor. Dann existiert ein eindeutiger previsibler Prozess H in $L^{2,\mathrm{loc}}(W)$ mit*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s.$$

Beweis. Sei zunächst $M \in \mathcal{H}^2$. Wähle nun H wie im letzten Satz für $F = M_\infty$. Dann gilt für jedes $t \geq 0$

$$M_t = \mathbf{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[M_\infty] + \int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s = M_0 + \int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s.$$

Für allgemeine Prozesse $M \in \mathcal{M}^{\mathrm{loc}}$ erhält man das Resultat mittels Lokalisierung. Hierzu wählt man eine Lokalisierungsfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sodass $M^{T_n} - M_0 \in \mathcal{H}_0$ ist. Dann existieren previsible Prozesse $H^{(n)} \in L^2(W)$ mit

$$M_t^{T_n} = M_0 + \int_0^t H_s^{(n)} \,\mathrm{d}W_s$$

und wir wählen

$$H_t := \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{(T_{n-1},T_n]}(t)\, H_t^{(n)},$$

wobei $T_0 := 0$. Es folgt

$$M_t = M_0 + \sum_{n=1}^\infty (M_{T_n\wedge t} - M_{T_{n-1}\wedge t}) = M_0 + \sum_{n=1}^\infty \int_{T_{n-1}\wedge t}^{T_n\wedge t} H_s^{(n)} \,\mathrm{d}W_s = M_0 + \int_0^t H_s \,\mathrm{d}W_s \tag{8}$$

für alle $t \geq 0$, fast sicher. Die Eindeutigkeit in $L^{2,\mathrm{loc}}(W)$ folgt wie im letzten Satz aus der Itô Isometrie. □

8 Finanzmathematische Anwendungen

8.1 Marktmodelle und selbstfinanzierende Handelsstrategien

Wir modellieren einen Finanzmarkt durch

- einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$, der den üblichen Bedingungen genügt ($\mathcal{F}_t$ repräsentiert hierbei die am Markt verfügbare Information) und
- $n+1$ nichtnegative stochastische Prozesse $S^{(0)}, \ldots, S^{(n)} \in \mathcal{S}$ (Preisprozesse), wobei $S^{(0)}$ den Preisverlauf einer risikolosen Anlage (Numeraire) beschreibt.

Der Handel in den Aktien am Markt wird nun durch sogenannte *Handelsstrategien* beschrieben. Dies sind $\mathbb{R}^{n+1}$-wertige $(\mathcal{F}_t)$-previsible Prozesse $\phi = (\phi^{(0)}, \ldots, \phi^{(n)})$ für die der *Gewinnprozess*

$$\int_0^t \phi_s \,\mathrm{d}S_s = \sum_{i=0}^{n} \int_0^t \phi_s^{(i)} \,\mathrm{d}S_s^{(i)}$$

wohldefiniert ist (d.h. $\phi^{(i)} \in \mathcal{I}(S^{(i)})$). Ferner heißt eine Handelsstrategie ϕ *selbstfinanzierende Handelsstrategie*, wenn der zugehörige *Vermögensprozess*

$$V_t(\phi) := \phi_t S_t = \sum_{i=0}^{n} \phi_t^{(i)} S_t^{(i)}$$

die stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}V_t(\phi) = \phi_t \,\mathrm{d}S_t = \sum_{i=0}^{n} \phi_t^{(i)} \,\mathrm{d}S_t^{(i)}$$

löst.

Bemerkung 8.1. i) Bei einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie kommen Vermögensveränderungen nur durch die Investitionen am Markt zustande. Es wird kein Geld zugeschossen bzw. abgezogen.

ii) Im Marktmodell sind Leerverkäufe möglich (d.h. $\phi^{(i)}$ darf negative Werte annehmen). Ferner wird davon ausgegangen, dass keine Transaktionskosten anfallen, dass das eigene Handeln keinen Einfluss auf den Marktpreis hat und zum gleichen Kurs verkauft und gekauft werden kann (d.h. kein Ask/Bid Spread).

Es stellt sich nun die Frage, wie man effizient selbstfinanzierende Strategien beschreiben kann.

Diskontierung

Wir nehmen an, dass der Preisprozess des Numeraires (d.h. $S^{(0)}$) lokal von 0 wegbeschränkt ist und betrachten die Preisprozesse $\widetilde{S}^{(i)}$ gegeben durch

$$\widetilde{S}_t^{(i)} = \frac{S_t^{(i)}}{S_t^{(0)}} \qquad (i = 0, \ldots n),$$

die *diskontierten Preisprozesse.*

Idee: Diskontieren wir alle Vermögenswerte indem wir durch $S^{(0)}$ teilen, so ist es letztendlich irrelevant wie stark eine Handelsstrategie in den Numeraire investiert ist. Aus diskontierter Sicht ändert dies nichts an der Wertentwicklung. Ziel ist es nun eine selbstfinanzierende Handelsstrategie durch Nennung von $\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(n)}$ zu beschreiben. Die Investition im Numeraire wird dann zur Aufnahme von Krediten bzw. zum Parken von überschüssigem Geld verwandt.

Seien nun $\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(n)}$ gegebene lokal endliche Prozesse. Ziel ist es nun $\phi^{(0)}$ so zu wählen, sodass ϕ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ist. Wir betrachten den *diskontierten Gewinnprozess*

$$\widetilde{G}_t(\phi) := \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \phi_s^{(i)} \, \mathrm{d}\widetilde{S}_s^{(i)}$$

Für gegebenes Startvermögen V_0 wählen wir nun $\phi^{(0)}$ so dass

$$\widetilde{V}_0 + \widetilde{G}_t(\phi) = \sum_{i=0}^{n} \phi_t^{(i)} S_t^{(i)} =: \widetilde{V}_t(\phi),$$

wobei $\widetilde{V}_0 = V_0/S_0^{(0)}$ (d.h. $\phi_t^{(0)} = \widetilde{V}_t(\phi) - \sum_{i=1}^n \phi_t^{(i)} \widetilde{S}_t^{(i)}$). Nun ist ϕ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie im diskontierten Modell. Wir zeigen nun, dass es auch eine Handelsstrategie im Ausgangsmodell ist:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V_t(\phi) &= \mathrm{d}(S_t^{(0)} \widetilde{V}_t(\phi)) = S_t^{(0)} \, \mathrm{d}\widetilde{V}_t(\phi) + \widetilde{V}_t(\phi) \, \mathrm{d}S_t^{(0)} + \mathrm{d}\langle S^{(0)}, \widetilde{V}(\phi) \rangle_t \\ &= \sum_{i=0}^{n} \phi^{(i)} \underbrace{\left[S^{(0)} \, \mathrm{d}\widetilde{S}_t^{(i)} + \widetilde{S}_t^{(i)} \, \mathrm{d}S_t^{(0)} + \mathrm{d}\langle S^{(0)}, \widetilde{S}^{(i)} \rangle_t \right]}_{= \mathrm{d}S^{(i)}} = \phi_t \, \mathrm{d}S_t. \end{aligned}$$

Proposition 8.2. *Unter der Annahme, dass $S^{(0)}$ lokal von 0 wegbeschränkt ist, entprechen die selbstfinanzierenden Handelsstrategieen des Ausgangsmodells denen des diskontierten Marktmodells.*

Bemerkung 8.3.

- Im diskontierten Marktmodell hat eine selbstfinanzierende Handelsstrategie den Vermögensprozess

  $$\widetilde{V}_t(\phi) = \widetilde{V}_0 + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \phi_s^{(i)} \, \mathrm{d}S_s^{(i)}.$$

  und selbstfinanzierende Handelsstrategien werden durch das Startkapital $\widetilde{V}_0$ und die Prozesse $\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(n)}$ beschrieben.

- Meist wird der Preisprozess des Numeraires deterministisch als $S_t^{(0)} = e^{rt}$ gewählt. In diesem Kontext heißt r Zinsrate.

8.2 Replikation von Europäischen Optionen (Teil I)

Wir betrachten ein Standardmarktmodell in diskontierter Form, d.h. $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$ bezeichnen die Preisprozesse von n Aktien und der Numeraire ist $S^{(0)} = 1$.

Eine europäische Option ist ein Kontrakt, dessen Inhaber zur Teit $T > 0$ (*Maturität*) ein Anrecht auf eine von den Aktienkursen abhängige Ausschüttung hat. Zum Beispiel hat eine *Call-Option* mit *Strike* $K > 0$ auf eine Aktie mit Preisprozess (S_t) den Wert

$$C = (S_T - K)^+$$

zur Maturität.

Wir nehmen nun an, dass eine Bank eine Option mit Ausschüttung $f(S_T)$ zur Zeit T ausgegeben hat. Es stellt sich nun die Frage, ob eine selbstfinazierende Handelsstrategie mit Wert $f(S_T)$ zur Maturität T (*Replikationsstraegie*) existiert. Der entsprechende Wert der Handelsstrategie kann dann als *fairer Preis* für die Option zu den früheren Zeiten $t \in [0, T)$ aufgefasst werden.

Annahmen: S sind die Aktienkurse eines Marktmodells mit Werten in einer offenen Menge $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Ferner gelte die SDE

$$\mathrm{d}S_t^{(i)} = a^{(i)}(t, S_t)\,\mathrm{d}W_t + b^{(i)}(t, S_t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei W ein multivariater-Wienerprozess (m-dimensional), $a^{(i)} : [0, T] \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^{1\times m}$ und $b^{(i)} : [0, T] \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Kurz schreiben wir auch

$$\mathrm{d}S_t = A(t, S_t)\,\mathrm{d}W_t + b(t, S_t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei A die Matrix-wertige Funktion $(a^{(i,j)})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}$ bezeichnet. Die Matrix AA^* beschreibt die lokalen Schwankungen, die *Volatilität*, und b die Tendenz oder den Trend der Aktie.

Zur Beantwortung der Replizierbarkeit von Optionen, fragen wir zunächst, unter welchen Bedingungen an eine stetige Funktion $u : [0, T] \times \mathcal{D}$, die C^2 auf $[0, T) \times \mathcal{D}$ ist, der Prozess $(u(t, S_t))_{t\in[0,T]}$ der Vermögensprozess einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie beschrieben durch $\phi = (\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(n)})$ und V_0 ist (d.h. $V_t(\phi) = u(t, S_t)$). Hierzu muss

$$V_t(\phi) = V_0 + \int_0^t \phi_s\,\mathrm{d}S_s$$

gelten. Wir wenden die Itô-Formel an und erhalten

$$\mathrm{d}u(t, S_t) = \nabla u(t, S_t)\,\mathrm{d}S_t + \partial_t u(t, S_t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\Delta_{AA^*} u(t, S_t)\,\mathrm{d}t.$$

Wir nehmen nun an, dass u die partielle Differentialgleichung

$$-\partial_t u(t, x) = \frac{1}{2}\Delta_{AA^*} u(t, x)$$

auf $[0, T) \times \mathcal{D}$ löst. Ferner wählen wir $\phi_t = \nabla u(t, S_t)$ und $V_0 = u(0, S_0)$. Dann ist ϕ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit

$$V_t(\phi) = u(t, S_t).$$

Satz 8.4. *Es gelten die obigen Annahmen an das Finanzmarktmodell. Ist u zweimal stetig differenzierbar in $[0, T) \times \mathcal{D}$ und stetig in $[0, T] \times \mathcal{D}$ mit*

$$\begin{cases} -\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta_{AA^*} u & \text{auf } [0, T) \times \mathcal{D} \\ u\big|_{t=T} = f & \text{auf } \mathcal{D}, \end{cases}$$

wobei $\Delta_{AA^*}u(t,x) = \sum_{i,j=1}^n a^{(i,j)}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u(t,x)$*. Dann beschreibt* $\phi = (\nabla u(t,S_t))_{t\in[0,T)}$ *mit Startkapital* $V_0 = u(0,S_0)$ *eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit*

$$V_t(\phi) = u(t,S_t) \text{ und insbesondere } V_T(\phi) = f(S_T).$$

8.3 Das Black-Scholes Modell

Wir betrachten nun das Black-Scholes Modell. Es besteht aus einer Aktie S_t deren Preisprozess ein geometrischer Wienerprozess ist, d.h.

$$S_t = S_0 \exp\{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\},$$

wobei $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ Parameter des Modells sind. Somit löst S die SDE

$$\mathrm{d}S_t = \sigma\, S_t\, \mathrm{d}W_t + \mu\, S_t\, \mathrm{d}t.$$

Ferner bezeichne $S^{(0)} := B := (e^{rt})_{t\geq 0}$ eine risikolose Anleihe mit fester Zinsrate r.
Wir führen zunächst die Diskontierung durch. Der diskontierte Preisprozess $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_t)$ ist gegeben durch $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$. Er löst die SDE

$$\mathrm{d}\widetilde{S}_t = \sigma\widetilde{S}_t\, \mathrm{d}W_t + (\mu - r)\widetilde{S}_t\, \mathrm{d}t.$$

Wir werden im folgenden eine Bewertungsformel für die Call-Option mit Strike K und Maturität T herleiten, d.h. eine Option mit Ausschüttung

$$C = (S_T - K)^+$$

zur Zeit T. Im diskontierten Modell entspricht dies der Ausschüttung

$$\widetilde{C} = e^{-rT}C = e^{-rT}(S_T - K)^+ = (\widetilde{S}_T - e^{-rT}K)^+$$

Nach dem vorhergehenden Satz ist die partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\partial_t u = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 u \quad \text{auf } [0,T)\times(0,\infty) \\ u\big|_{t=T} = (x - e^{-rT}K)^+ \end{cases}$$

zu analysieren.

Satz 8.5 (Black-Scholes Formel)**.** *Man erhält eine selbstfinanzierende Handelsstrategie* ϕ*, die den Wert eines Calls mit Maturität* T *und Strike* K *repliziert, wenn man* u *als*

$$u(t,x) = x\,\Phi\Big(\frac{\log(x/K) + rT + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big) - Ke^{-rT}\,\Phi\Big(\frac{\log(x/K) + rT - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\Big)$$

und

$$\phi_t = \partial_x u(t,S_t)$$

wählt, wobei Φ *die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.*

8.4 Arbitrage

Wir bezeichnen weiterhin mit $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$ ein diskontiertes Marktmodell.
Bisher haben wir an selbstfinanzierende Handelsstrategien keine Forderungen gestellt, die Verdopplungsstrategien ausschließen. Insbesondere kann man folgendes Resultat beweisen:

Satz 8.6 (Dudley). *Sei $(\mathcal{F}_t)$ die von einem Wienerprozess W erzeugte Filtration, $T > 0$ und F eine $\mathcal{F}_T$-messbare reelle Zufallsvariable. Dann existiert $\phi \in \mathcal{I}(W)$ mit*

$$F = \int_0^T \phi_s \, \mathrm{d}W_s.$$

Definition 8.7. i) Eine selbstfinanzerende Handelsstrategie ϕ heißt *zulässige Handelsstrategie* (über $[0, T]$), wenn der entsprechende Vermögensprozess $(V_t(\phi))$ uniform nach unten beschränkt ist.

ii) Eine zulässige Handelsstrategie über $[0, T]$ heißt *Arbitrage*, wenn

$$V_0(\phi) = 0, \;\; V_T(\phi) \geq 0 \;\; \text{und } \mathbf{P}(V_T(\phi) > 0) > 0.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}_T^{\text{loc}}(S)$ die Menge der *äquivalenten lokalen Martingalmaße* auf $[0, T]$, d.h. alle Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbf{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$

- die äquivalent zu $\mathbf{P}$ sind ($\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$) und
- unter denen S ein multivariates lokales Martingal auf $[0, T]$ ist.

Satz 8.8. *Ist $\mathcal{P}_T^{\text{loc}}(S) \neq \emptyset$, so ist das Handelsmodell arbitragefrei.*

Beweis. Sei $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_T^{\text{loc}}(S)$ und ϕ eine zulässige Handelsstrategie mit $V_0(\phi) = 0$. Unter $\mathbf{Q}$ ist S ein multivariates lokales Martingal (über $[0, T]$) und somit ist

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + (\phi \cdot S)_t$$

ein lokales Martingal unter $\mathbf{Q}$. Nun ist jedes nach unten beschränkte lokale Martingal automatisch ein Supermartingal und wir erhalten

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[V_T(\phi)] \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[V_0(\phi)] = 0.$$

Ist also $V_T(\phi)$ $\mathbf{P}$-fast sicher nicht negativ, so gilt dies auch $\mathbf{Q}$-fast sicher und es folgt $V_T(\phi) = 0$ $\mathbf{Q}$- (oder äquivalent $\mathbf{P}$-) fast sicher. $\square$

Es stellt sich nun die Frage, ob auch die Umkehrung gültig ist. Dies ist für eine leicht abgeänderte Arbitragebedingung in der Tat der Fall.

Definition 8.9. Gilt für jede Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zulässiger Handelsstrategien mit $V_0(\phi_n) = 0$ und $V_T(\phi_n) \geq -\frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(V_T(\phi_n) \geq \delta) = 0 \qquad \forall \delta > 0,$$

so erfüllt der Markt die *"No free lunch with vanishing risk"* Bedingung (NFLVR) auf $[0, T]$.

Satz 8.10 (FTAP). *Es gilt*

$$\text{(NFLVR)} \iff \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S) \neq \emptyset.$$

Satz 8.11. *Seien $S^{(1)}, \ldots, S^{(n)}$ die diskontierten Aktienkurse eines Finanzmarktmodells mit*

$$\mathrm{d}S_t = A_t \,\mathrm{d}W_t + b_t \,\mathrm{d}t,$$

wobei W ein $(\mathcal{F}_t)$-Wienerprozess und (A_t) und (b_t) previsible integrierbare Prozesse sind. Existiert ein integrierbarer Prozess (θ_t) mit

$$A_t\theta_t = b_t \qquad \lambda\big|_{[0,T]} \otimes \mathbf{P}\text{-fast überall},$$

und

$$\mathbf{E}\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T |\theta_t|^2 \,\mathrm{d}t\Big) < \infty,$$

so existiert ein äquivalentes lokales Martingalmaß. Insbesondere ist das Finanzmarktmodell arbitragefrei.

Beweis. Wir betrachten $L = -\theta^* \cdot W$ und $\mathbf{Q}$ mit

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}} = \mathcal{E}(L)_T.$$

Wegen des Novikov Kriteriums ist $(\mathcal{E}(L)_t)_{t\in[0,T]}$ ein Martingal und $\mathbf{Q}$ ein $\mathbf{P}$-äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß. Wegen der Girsanov-Transformation ist ferner

$$\widetilde{W}^{(i)} := W^{(i)} - \langle L, W^{(i)}\rangle = W^{(i)} + \langle \theta^* \cdot W, W^{(i)}\rangle = W^{(i)} + \int_0^t \theta_s^{(i)} \,\mathrm{d}s$$

ein $\mathbf{Q}$ Wienerprozess. Es folgt

$$\mathrm{d}S_t = A_t \,\mathrm{d}W_t + b_t \,\mathrm{d}t = A_t \,\mathrm{d}\widetilde{W}_t - A_t\theta_t \,\mathrm{d}t + b_t \,\mathrm{d}t = A_t \,\mathrm{d}\widetilde{W}_t$$

und (S_t) ist ein lokales $\mathbf{Q}$-Martingal. □

Satz 8.12. *Das (diskontierte) Black-Scholes Modell ist arbitragefrei.*

Beweis. Der diskontierte Preisprozess (S_t) der Aktie löst die SDE

$$\mathrm{d}S_t = \sigma S_t \,\mathrm{d}W_t + (\mu - r)S_t \,\mathrm{d}t.$$

Wählt man $\theta \equiv \frac{\mu - r}{\sigma}$ so folgt die Arbitragefreiheit aus dem vorhergehenden Satz. □

8.5 Replikation von Claims (Teil II)

Wir arbeiten weiterhin in einem diskontierten Standard-Finanzmarktmodell auf einem festen Zeitintervall $[0,T]$. Ferner nehmen wir an, dass $\mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S) \neq \emptyset$.

Definition 8.13. (i) Eine nicht-negative $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable bezeichnen wir als *Claim* (oder *Anspruch*).

(ii) Sei $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$. Eine zulässige Handelsstrategie ϕ heißt $\mathbf{Q}$-*zulässig*, wenn der Vermögensprozess $(V_t(\phi))_{t\in[0,T]}$ ein $\mathbf{Q}$-Martingal ist.

(iii) Für $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$ heißt ein Claim X $\mathbf{Q}$-*replizierbar*, wenn es eine $\mathbf{Q}$-zulässige Strategie ϕ gibt, die X repliziert, d.h. für die $V_T(\phi) = X$ gilt. Die entsprechende Handelsstrategie bezeichnen wir als $\mathbf{Q}$-Replikation.

(iv) Existiert ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$ für das X $\mathbf{Q}$-replizierbar ist mit einer $\mathbf{Q}$-Replikation ϕ, so nennen wir kurz X *replizierbar* und ϕ *Replikation von* X.

Proposition 8.14. *Ist ein Claim X mithilfe einer $\mathbf{Q}$-Replikation ϕ (mit $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$)* replizierbar*, so folgt*

$$V_t(\phi) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X|\mathcal{F}_t] \qquad (t \in [0,T]).$$

Insbesondere ist der Vermögensprozess jeder $\mathbf{Q}$-Replikation gleich.

Beweis. Laut Annahme ist $(V_t(\phi))_{t\in[0,T]}$ ein $\mathbf{Q}$-Martingal und somit gilt

$$V_t(\phi) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[V_T(\phi)|\mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X|\mathcal{F}_t].$$

□

Proposition 8.15. *Angenommen es existiere eine $\mathbf{Q}$-Replikation ϕ, für einen Claim X. Es gilt für jede zulässige Strategie ϕ' mit $V_T(\phi) = X$*

$$V_t(\phi') \geq V_t(\phi) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X|\mathcal{F}_t]$$

und für jedes $\mathbf{Q}' \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$

$$V_t(\phi) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}'}[X|\mathcal{F}_t].$$

Bemerkung 8.16. Ist X replizierbar, so folgt dass jede Replikation ϕ die bezüglich eines $\mathbf{Q}$'s zulässig ist, den gleichen Vermögensprozess hat.

Beweis. Wir bemerken, dass

$$V_t(\phi') = V_0(\phi') + (\phi' \cdot S)_t$$

unter $\mathbf{Q}$ ein nach unten beschränktes lokales Martingal ist (somit also auch ein Supermartingal), sodass

$$V_t(\phi') \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\underbrace{V_T(\phi')}_{=X}|\mathcal{F}_t] = V_t(\phi).$$

Analog ist $(V_t(\phi))$ für jedes $\mathbf{Q}' \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$ ein Supermartingal, sodass

$$V_t(\phi) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}'}[X|\mathcal{F}_t]$$

□

Definition 8.17. Ist ein Claim X mit Maturität T replizierbar, so nennen wir

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X|\mathcal{F}_t]$$

den *arbitragefreien Preis* zur Zeit t von X. Hierbei bezeichne $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$ ein Maß für das eine $\mathbf{Q}$-Replikation existiert.

Satz 8.18. *Im (diskontierten) Black-Scholes Modell ist der zuvor berechnete Preis eines Calls mit Maturiät T und Strike K der arbitragefreie Preis der Option.*

Beweis. Wähle $L = \frac{r-\mu}{\sigma} W_t$ und $\mathbf{Q}$ mittels

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}} = \mathcal{E}(L)_T.$$

Dann ist $\widetilde{W}_t := W_t - \langle L, W\rangle_t = W_t + \frac{b-r}{\sigma}\, t$ ein $\mathbf{Q}$-Wienerprozess und $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$, da

$$\mathrm{d}S_t = \sigma S_t \,\mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

Es folgt, dass

$$S_T = S_t \exp\{\sigma(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\}.$$

Für den diskontierten Wert $\widetilde{C} = (S_T - \widetilde{K})^+$ des Calls mit Strike K gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\widetilde{C}|\mathcal{F}_t](\omega) &= \mathbf{E}\big[\big(S_t(\omega)\, \exp\{\sigma(\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\} - \widetilde{K}\big)^+\big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \big(S_t(\omega)\, \exp\{\sigma\sqrt{T-t}\, v - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\} - \widetilde{K}\big)^+ e^{-v^2/2}\, \mathrm{d}v \\
&= \cdots = u(t, S_t),
\end{aligned}$$

wobei u die zuvor berechnete Funktion ist. □

Satz 8.19. *Sei X ein uniform beschränkter Claim, $\mathcal{F}_0$ eine triviale σ-Algebra und $\mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S) \neq \emptyset$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Für ein $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$ ist X $\mathbf{Q}$-replizierbar.

(ii) Für alle $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$ ist X $\mathbf{Q}$-replizierbar.

(iii) Die Abbildung

$$\mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S) \ni \mathbf{Q} \mapsto \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] \in \mathbb{R}$$

ist konstant.

Beweis. (i)⇒(ii): Sei ϕ eine $\mathbf{Q}$-Replikation von X. Nun ist für $\mathbf{Q}' \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$ gerade $(V_t(\phi))$ ein beschränktes lokales $\mathbf{Q}'$-Martingal $\implies$ $\mathbf{Q}'$-Zulässigkeit.

(ii)⇒(iii): Für $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$ gilt

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X|\mathcal{F}_0] = V_0(\phi) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}'}[X|\mathcal{F}_0] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}'}[X].$$

(iii)⇒(i): kompliziert. □

Bemerkung 8.20. (i) Enthält $\mathcal{P}_T^{\text{loc}}(S)$ ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß, so ist jeder uniform beschränkte Claim replizierbar, bzgl. $\mathbf{Q}$-zulässiger Strategien.

(ii) Enthält $\mathcal{P}_T^{\text{loc}}(S)$ mehr als ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, so ist nicht jeder uniform beschränkte Claim replizierbar. Gegenbeispiel: Wir wählen für zwei verschiedene Maße $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \mathcal{P}_T^{\text{loc}}(S)$

$$X = \mathbb{1}_{\{Z>1\}}, \text{ wobei } Z = \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}'}{\mathrm{d}\mathbf{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_T}$$

Dann ist

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}'}[X] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[ZX] > \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X]$$

und somit X nicht replizierbar.

8.6 Vollständige Marktmodelle

Sei im folgenden W ein $\mathbb{R}^n$-wertiger Wienerprozess und $(\mathcal{F}_t)$ die Augmentierung, der von W erzeugten Filtration. Ferner bezeichne $S = (S^{(1)}, \ldots, S^{(n)})$ den Vektor der Preisprozesse in einem diskontierten Marktmodell. Wir nehme nan, dass

$$\mathrm{d}S_t = A_t \,\mathrm{d}W_t + b_t \,\mathrm{d}t,$$

für integrierbare previsiblen Prozessen (A_t) und (b_t).

Satz 8.21 (Charakterisierung der äquivalenten Martingalmaße). *Die Menge $\mathcal{P}_T^{\text{loc}}(S)$ besteht aus allen Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbf{Q}$ der Form*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}} = \mathcal{E}(L)_T,$$

wobei $L \in \mathcal{M}_0^{\text{loc}}$ sodass

- $(\mathcal{E}(L)_t)_{t\in[0,T]}$ *ein Martingal ist und*
- $L = -\theta^* \cdot W$ *mit (θ_t) integrierbar und $A_t\theta_t = b_t$ $\lambda\big|_{[0,T]} \otimes \mathbf{P}$-fast überall gilt.*

Beweis. Wir haben bereits zuvor gesehen, dass ein L von der obigen Form zur Definiton eines lokalen äquivalenten Martingalmaßes verwandt werden kann. Es verbleibt zu zeigen, dass jedes äquivalente lokale Martingalmaß eine solche Darstellungen besitzt. Hierzu sei $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_T^{\text{loc}}(S)$. Nach Satz 7.15 existiert eine stetige Version der Dichte

$$Z_t = \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t}.$$

Nun gilt $Z_0 = 1$ (da $\mathcal{F}_0$ trivial ist) und wir wählen

$$L_t = \mathcal{L}(Z)_t = (\frac{1}{Z} \cdot Z)_t \text{ sodass } Z_t = \mathcal{E}(L)_t.$$

Wegen des Martingaldarstellungssatzes auf dem Wienerraum existiert $\theta \in L^{2,\text{loc}}(W)$ mit

$$L = -\theta \cdot W.$$

Ferner ist $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s \,\mathrm{d}s$ ein $\mathbf{Q}$-lokales Martingal und

$$\mathrm{d}S_t = A_t \,\mathrm{d}W_t + b_t \,\mathrm{d}t = A_t \,\mathrm{d}\widetilde{W}_t - A_t\theta_t \,\mathrm{d}t + b_t \,\mathrm{d}t.$$

Damit also S_t ein $\mathbf{Q}$-lokales Martingal ist, muss $A_t\theta_t = b_t \quad \lambda\big|_{[0,T]} \otimes \mathbf{Q}$-fast überall gelten. □

Satz 8.22. *Angenommen (A_t) ist $\lambda|_{[0,T]} \otimes \mathbf{P}$-fast überall injektiv und $\mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S) \neq \emptyset$. Dann ist $\mathbf{Q}$ gegeben durch*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}} = \mathcal{E}(L)_T \text{ mit } L = -(A^{-1}b \cdot W)$$

das eindeutige äquivalente Martingalmaß und jeder $\mathbf{Q}$-integrierbare Claim X ist replizierbar (Marktvollständigkeit). *Insbesondere ist der arbitragefreie Preis gerade*

$$V_t(\phi) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X|\mathcal{F}_t].$$

Beweisskizze. Aus obigem Satz folgt, dass für ein äquivalentes lokales Martingalmaß $\mathbf{Q}$ gerade die Darstellung gelten muss. Ferner sei $\theta_t := A_t^{-1}b_t$ und bemerke, dass $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s \,\mathrm{d}s$ ein $\mathbf{Q}$-Wienerprozess ist. Weiterhin gilt

$$\mathrm{d}S_t = A_t \mathrm{d}\widetilde{W}_t.$$

Wir wenden den Repräsentationssatz für Brownsche Filtrationen an (Achtung: Hier ist eine Lücke, da $(\mathcal{F}_t)$ von (W_t) und nicht $(\widetilde{W}_t)$ erzeugt wurde.) und erhalten eine $\widetilde{W}$-integrierbare Funktion (φ_t) mit

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X|\mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] + \int_0^t \varphi_s \,\mathrm{d}\widetilde{W}_s = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X] + \int_0^t \underbrace{\varphi_s A_s^{-1}}_{=:\phi_s} \,\mathrm{d}S_s.$$

Somit ist die selbstfinanzierende Handelsstrategie ϕ mit Startvermögen $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X]$ $\mathbf{Q}$-zulässige Replikationsstrategie. □

Bemerkung 8.23. Ist (A_t) nicht $\lambda|_{[0,T]} \otimes \mathbf{P}$-fast überall injektiv, so existieren mehrere äquivalente Martingalmaße und es sind nicht alle beschränkten $\mathcal{F}_T$-messbaren X mittels $\mathbf{Q}$-zulässiger Strategien replizierbar.

Satz 8.24. *Angenommen $\mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S) \neq \emptyset$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Der Finanzmarkt ist vollständig, d.h. für $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}(S)$ und einen $\mathbf{Q}$-integrierbaren Claim X existiert eine $\mathbf{Q}$-Replikation von X.

(ii) $\mathcal{P}_T^{\mathrm{loc}}$ enthählt genau ein Element (Eindeutigkeit des äquivalenten lokalen Martingalmaßes)

(iii) (A_t) ist $\lambda|_{[0,T]} \otimes \mathbf{P}$-fast überall invertierbar.