1. Übungsblatt zur Maß- u. Integrationstheorie

SS 2011

Abgabe: Montag, 18.04.11

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Seien $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_3 \subset \dots \subset \mathcal{P}(X)$ Mengenalgebren. Zeigen Sie, dass auch

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i$$

eine Mengenalgebra ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X abzählbar und $\mathfrak{A}$ eine σ -Algebra, welche die Punkte in X trennt, d.h. für bel. $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, existiert eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit $x_1 \in A$, $x_2 \notin A$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(X)$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine unendliche Mengenalgebra. Zeigen Sie, dass eine Folge $A_1, A_2, A_3, \dots$ nichtleerer Mengen in $\mathfrak{A}$ existiert mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{K}, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ die Familien aller kompakten bzw. abgeschlossenen Teilmengen von X . Zeigen Sie:

1. Es gilt $\mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(X)$.
2. Ist speziell $X = \mathbb{R}^n$, so gilt $\mathfrak{A}_\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(X)$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Familie und $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ erzeugte monotone Mengenfamilie. Zeigen Sie, dass für jedes $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{E})$ eine Folge $E_1, E_2, \dots$ in $\mathcal{E}$ existiert mit

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Aufgabe 6**(4 Punkte)**

Seien (X, d) , (Y, d') metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie, dass die Menge aller Stetigkeitsstellen von f eine Borel-Menge ist.