Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. habil. Ilka Agricola
Fb Mathematik u. Informatik Daniel Hohmann

2. Übungsblatt zur Maß- u. Integrationstheorie

SS 2011

Abgabe: Montag, 02.05.11

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Seien (X, d), (Y, d') metrische Räume, Y sei vollständig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Funktionen $f_n : X \to Y$. Zeigen Sie, dass

$$\Sigma = \big\{x \in X : f_n(x) \text{ konvergiert in } Y\big\}$$

eine Borel-Menge ist.

Aufgabe 8 (1+3 Punkte)

Seien $f : Y \to \bar{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine σ-Algebra und $g : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Borel-Funktion. Zeigen Sie:

1. Ist f $\mathfrak{A}$-messbar, so ist auch $g \circ f : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-messbar.

2. Ist f^3 $\mathfrak{A}$-messbar, so auch f. Gilt dies auch für f^2 und f?

Aufgabe 9 (4+4 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine σ-Algebra.

1. Sei $f : Y \to \mathbb{R}$ eine $\mathfrak{A}$-messbare Funktion. Für $c \in \mathbb{R}$ setzen wir $E_c = \{y \in Y : f(y) < c\}$. Zeigen Sie:

   a) $E_c \in \mathfrak{A}$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

   b) $\bigcap_{c\in\mathbb{R}} E_c = \emptyset$.

   c) $\bigcup_{c\in\mathbb{R}} E_c = Y$.

   d) Für jedes $c_0 \in \mathbb{R}$ ist $\bigcup_{c<c_0} E_c = E_{c_0}$.

2. Sei jetzt $\{E_c : c \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(Y)$ eine beliebige Familie von Mengen mit den Eigenschaften a)-d). Zeigen Sie, dass dann eine eindeutig bestimmte, messbare Funktion $f : Y \to \mathbb{R}$ existiert mit $\{y : f(y) < c\} = E_c$.

Aufgabe 10 (4+2 Punkte)

Seien $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra und $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$ eine additive Funktion. Für $A \subset X$ definieren wir

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) : A_k \in \mathfrak{A}\,,\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass μ^* ein äußeres Maß ist und für $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.
2. Finden Sie ein Beispiel, so dass in obiger Situation $\mu^*(A) < \mu(A)$ gilt.

Aufgabe 11 (3 Punkte)

Seien $\mu_1^*, \mu_2^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ zwei äußere Maße. Zeigen Sie, dass $\mu_3^* = \max(\mu_1^*, \mu_2^*)$ ein äußeres Maß ist.

Aufgabe 12 (3 Punkte)

Sei $(\mu_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von äußeren Maßen $\mu_n^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$. Zeigen Sie, dass auch $\mu^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^*$ ein äußeres Maß ist.

Aufgabe 13 (3 Punkte)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer, reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty] \quad , \quad \mu(A) = \sum_{n \in A} a_n$$

ein Maß ist.