Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. habil. Ilka Agricola
Fb Mathematik u. Informatik Daniel Hohmann

3. Übungsblatt zur Maß- u. Integrationstheorie

SS 2011

Abgabe: Montag, 16.05.11

Aufgabe 14 (8 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ durch

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \mu(A) : A \in \mathfrak{A}, E \subset A \right\}.$$

Zeigen Sie:

1. μ^* ist ein äußeres Maß mit $\mu^*(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathfrak{A}$.
2. Für jede Menge $E \subset \Omega$ existiert ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $E \subset A$ und $\mu^*(E) = \mu(A)$.
3. Ist μ σ-endlich, so existiert für jedes $E \subset \Omega$ eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit
   - $E \subset A$.
   - Für jedes $B \in \mathfrak{A}$ mit $E \subset B$ ist $\mu(A \backslash B) = 0$. (Minimalität von A)
4. Bezeichnet $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen, so gilt $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$.

Aufgabe 15 (3+1 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Verteilungsfunktion und $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ ein Maß mit

$$\mu((-\infty, x]) = F(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1. μ ist ein reguläres, eindeutig bestimmtes Borelmaß.
2. Es gilt $\mu(\mathbb{R}) = 1$, d.h. μ ist insbesondere ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Sei $A \subset [0, 1]$ die Menge aller Zahlen x, welche sich darstellen lassen als

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

mit $a_k \neq 7$. Berechnen Sie das Lebesgue-Maß von A.

Aufgabe 17 **(2 Punkte)**

Zeigen Sie, dass jede Lebesgue-messbare Menge $B \subset \mathbb{R}$ positiven Maßes, d.h. $\mu_L(B) > 0$, überabzählbar ist.

Aufgabe 18 **(6 Punkte)**

Sei μ_L das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ und $E \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Menge mit $0 < \mu_L(E) < \infty$. Zeigen Sie, dass zu jedem $\alpha \in (0, \mu_L(E))$ eine Zahl $x_\alpha \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\mu_L((-\infty, x_\alpha) \cap E) = \alpha\,.$$

Aufgabe 19 **(1+3 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $S_f = \big\{x \in \mathbb{R} : f \text{ ist unstetig in } x\big\}$.

1. Begründen sie, warum gilt $S_f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

2. Zeigen Sie: Ist $\mu_L(S_f) = 0$, so ist f Lebesgue-messbar.

Zur Erinnerung: Man nennt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar, wenn sie $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist.