Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. habil. Ilka Agricola
Fb Mathematik u. Informatik Daniel Hohmann

4. Übungsblatt zur Maß- u. Integrationstheorie

SS 2011

Abgabe: Montag, 23.05.11

Aufgabe 20 (4+2 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ ein beliebiges Mengensystem mit $\emptyset \in \mathcal{M}$ und $\nu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ ein Abbildung mit $\nu(\emptyset) = 0$. Für $\delta > 0$ betrachten wir auf $\mathcal{P}(X)$ die äußeren Maße ν_δ^* gemäß

$$\nu_\delta^*(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \nu(M_k) : M_k \in \mathcal{M}, \mathrm{diam}(M_k) \leq \delta, A \subset \bigcup_k M_k \right\},$$

wobei $\mathrm{diam}(M) = \sup\{d(x,y) : x, y \in M\}$ und $\inf(\emptyset) = \infty$.

1. Zeigen Sie, dass $\nu^* := \sup_{\delta>0} \nu_\delta^*$ ein metrisches äußeres Maß ist.

2. Ist auch jedes einzelne μ_δ^* schon metrisch?

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel einer Lebesgue-messbaren Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, so dass keine stetige Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert mit $\mu_L\big(\{x : f(x) \neq g(x)\}\big) = 0$.

Aufgabe 22 (3 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ eine beschränkte Menge mit $\mu_L(A) > 0$. Zeigen Sie, dass dann eine nicht-Lebesgue-messbare Teilmenge $A_1 \subset A$ existiert.

Aufgabe 23 (4+4 Punkte)

Seien $C \subset [0,1]$ die Cantor-Menge und $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ die Cantor-Funktion sowie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = x + \varphi(x)$.

1. Zeigen Sie, dass gilt $g([0,1]\backslash C) \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ mit $\mu_L\big(g([0,1]\backslash C)\big) = 1$ und folgern Sie

$$\mu_L(g(C)) > 0\,.$$

2. Finden Sie ein Beispiel einer Lebesgue-messbaren Funktion f und einer Menge $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, so dass $f^{-1}(A)$ nicht Lebesgue-messbar ist.

Hinweis: Betrachten Sie für f die Inverse von g und verwenden Sie Aufgabe 22 für die Existenz der Menge A.