Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik u. Informatik

Prof. Dr. habil. Ilka Agricola
Daniel Hohmann

5. Übungsblatt zur Maß- u. Integrationstheorie

SS 2011

Abgabe: Montag, 06.06.11

Aufgabe 24 **(4 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und $f : X \to \mathbb{R}_+$ eine positive, $\mathcal{A}$-messbare Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mu\big(\{x \in X : n \leq f(x) < n+1\}\big) < \infty\,.$$

Aufgabe 25 **(4 Punkte)**

Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$, wobei ν das Zählmaß sei, welches die Anzahl der Elemente einer Menge liefert. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert, und dass in diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,.$$

Aufgabe 26 **(6 Punkte)**

Sei $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$ der Maßraum aus Aufgabe 25. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionenfolgen

$$f_n(k) = \begin{cases} 1/n & , \quad 1 \leq k \leq n\,, \\ 0 & , \quad k > n\,, \end{cases} \qquad g_n(k) = \begin{cases} 1/k & , \quad 1 \leq k \leq n\,, \\ 0 & , \quad k > n\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. Alle f_n und g_n sind integrierbar.
2. Die Folgen f_n und g_n konvergieren gleichmäßig gegen Grenzfunktionen f und g.
3. g ist nicht integrierbar.
4. f ist integrierbar, aber es gilt $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\nu \neq \int f\, d\nu$.

Aufgabe 27 **(4 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Die Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ seien $\mathcal{A}$-messbar mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty \, .$$

Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ μ-fast überall konvergiert.

Aufgabe 28 **(4 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und darauf $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Mengen $A_n = \{x \in X : |f(x)| > n\}$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \big(n \cdot \mu(A_n)\big) = 0 \, .$$

Verwenden Sie dazu den Satz von der majorisierenden Konvergenz.