Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. habil. Ilka Agricola
Fb Mathematik u. Informatik Daniel Hohmann

6. Übungsblatt zur Maß- u. Integrationstheorie

SS 2011

Abgabe: Montag, 27.06.11

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Für eine Funktion $f \in L^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu_L)$ sei die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R} \quad , \quad f_k(x) = x^k f(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass alle f_k integrierbar sind und der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu_L$$

existiert. Geben Sie diesen an.

Aufgabe 30 (1+3 Punkte)

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q}\,, \\ x^3 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Ist f Riemann-integrierbar?
2. Zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist und berechnen Sie $\int f \, d\mu_L$.

Aufgabe 31 (2+2*+2 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und darauf $f, (f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ messbare Funktionen. Weiter sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

1. $f_k \xrightarrow{\text{f.ü.}} f \implies g \circ f_k \xrightarrow{\text{f.ü.}} g \circ f$

2.* $f_k \xrightarrow{(\mu)} f$ und $\mu(X) < \infty \implies g \circ f_k \xrightarrow{(\mu)} g \circ f$

3. $f_k \xrightarrow{(\mu)} f$ und g Lipschitz-stetig $\implies g \circ f_k \xrightarrow{(\mu)} g \circ f$

Zur Erinnerung: Eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, falls eine Konstante $L > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$.

Aufgabe 32 **(2+2+2* Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und darauf $f, g, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbare Funktionen mit $f_k \xrightarrow{(\mu)} f$ und $g_n \xrightarrow{(\mu)} g$. Zeigen Sie:

1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $af_k + bg_k \xrightarrow{(\mu)} af + bg$.

2. $|f_k| \xrightarrow{(\mu)} |f|$.

3.* Ist $\mu(X) < \infty$, so gilt $f_k g_k \xrightarrow{(\mu)} fg$. Im Allgemeinen ist dies jedoch falsch.

Aufgabe 33 **(3 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und darauf $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbare Funktionen mit

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n| \, d\mu = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass gilt $f_n \xrightarrow{(\mu)} 0$.

Aufgabe 34 **(3 Punkte)**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und darauf $f, g, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbare Funktionen mit $f_n \xrightarrow{(\mu)} f$ und $g_n \xrightarrow{(\mu)} g$. Zeigen Sie, dass aus $f_n \le g_n$, $n \in \mathbb{N}$ folgt $f \le g$ μ-fast überall.

Hinweis

Die mit * gekennzeichneten Aufgaben sind Bonusaufgaben.