7. Übungsblatt zur Maß- u. Integrationstheorie SS 2011

Abgabe: Montag, 04.07.11

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $f \in L^p([0, \infty))$ für ein $p \geq 1$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Aufgabe 36 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und darauf $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Weiter sei

$$\Phi = \{ \varphi = \mathbf{1}_{A_1} - \mathbf{1}_{A_2} : A_1, A_2 \in \mathfrak{A} \}.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \int \varphi f \, d\mu = \int |f| \, d\mu.$$

Aufgabe 37 (4 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n^{1/p}}{\log(n+1)} & \text{für } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) in $L^p([0, 1])$ konvergiert, jedoch nicht in $L^q([0, 1])$ für $q > p$.

Aufgabe 38 (4 Punkte)

Seien $a, b, c > 0$ mit $1/a + 1/b + 1/c = 1$. Seien weiter $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in L^a(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $g \in L^b(X, \mathfrak{A}, \mu)$ und $h \in L^c(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$f \cdot g \cdot h \in L^1(X, \mathfrak{A}, \mu) \quad \text{mit} \quad \|f \cdot g \cdot h\|_1 \leq \|f\|_a \cdot \|g\|_b \cdot \|h\|_c.$$