Philipps-Universität Marburg
Fb Mathematik u. Informatik

Prof. Dr. habil. Ilka Agricola
Daniel Hohmann

8. Übungsblatt zur Maß- u. Integrationstheorie

SS 2011

Abgabe: Montag, 11.07.11

Aufgabe 39 (4 Punkte)

Seien $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $f : A \to [0, \infty)$ $\mathcal{L}$-messbar. Zeigen Sie, dass mit $g(x) = \mu_L(\{a \in A : f(a) \geq x\})$ gilt

$$\int_A f \, d\mu_L^n = \int_{[0,\infty)} g \, d\mu_L \, .$$

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Wir betrachten die Kugel $K = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}$ und den Zylinder $Z = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1/2\big\}$. Berechnen Sie mit Hilfe des Cavalieri'schen Prinzips das Volumen $\mu_L^3(K \cap Z)$ des Körpers $K \cap Z$.

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $g : X \to [0, \infty)$ messbar. Weiter sei das Maß ν definiert durch

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu \quad , \quad A \in \mathfrak{A} \, .$$

Zeigen Sie, dass die zwei folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $\mu \ll \nu$.

2. Die Funktion g ist μ-fast überall echt positiv.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Sei ν ein signiertes Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie, dass eine eindeutige Zerlegung

$$\nu = \nu^+ - \nu^-$$

existiert, so dass ν^+ und ν^- zwei zueinander singuläre Maße auf $(X, \mathfrak{A})$ sind.

Definition: Zwei Maße μ_1, μ_2 heißen *singulär* zueinander, wenn Mengen $A, B \in \mathfrak{A}$ existieren mit $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, sowie $\mu_1(A) = 0$ und $\mu_2(B) = 0$.