

1. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik SS 2011

keine Abgabe, Lösungen werden am 02.05.2011 in der Übung besprochen

Aufgabe 1

Sei $X = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ mit $\text{Rang}(X) = p$ und bezeichne V den von $v_i \in \mathbb{R}^n$ erzeugten Unterraum, d.h. $V := \text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$. Zeigen Sie, dass

$$P_X : \mathbb{R}^n \rightarrow V \quad z \mapsto X(X^T X)^{-1} X^T z$$

die orthogonale Projektion auf V ist.

Aufgabe 2

Sie haben in der Vorlesung das einfache lineare Modell $y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$ kennen gelernt. Allerdings müssen die vorliegenden Daten in der Praxis oft erst transformiert werden, bevor dieses Modell angewendet werden kann.

Welche der folgenden Funktionen lassen sich durch eine geeignete Transformation linearisieren, das heißt auf die Form $\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \tilde{x}$ bringen? Geben Sie, falls möglich, die zu verwendende Transformation und den Zusammenhang zwischen $(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1)$ und (β_0, β_1) an.

(i) $y = \beta_0 x^{\beta_1}$

(ii) $y = \beta_0 \exp(\beta_1 x)$

(iii) $y = x/(\beta_0 x - \beta_1)$

(iv) $y = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}$

Aufgabe 3

Betrachten Sie das einfache lineare Regressionsmodell $y = X\beta + \epsilon$ mit

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}.$$

Der Kleinste-Quadrate Schätzer $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ für die beiden Regressionskoeffizienten β_0 und β_1 ist durch

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

gegeben. Geben Sie eine explizite Formel für $\hat{\beta}_0$ und $\hat{\beta}_1$ an.

Aufgabe 4

Sie beobachten die folgenden Datenpunkte

x_i	0.10	2.48	3.63	1.28	-1.57	3.20	-1.07	0.43
y_i	1.86	5.29	8.34	3.03	-1.59	7.77	-0.61	2.27

- (i) Zeichnen Sie die Daten. Was könnte ein geeignetes Modell sein?
Transformieren Sie falls nötig auf ein lineares Modell $y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$.
 - (ii) Bestimmen Sie den Kleinste-Quadrate Schätzer für (β_0, β_1) .
 - (iii) Zeichnen Sie zu Ihren Daten aus (i) die angepasste Regressionsgerade.
- Hinweis:** Für Aufgabe (ii) benötigen Sie die Normalgleichungen bzw. Aufgabe 3.