Philipps-Universität Marburg Prof. Dr. Hajo Holzmann
Fb Mathematik u. Informatik Florian Schwaiger

2. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik
SS 2011

keine Abgabe, Lösungen werden am 16.05.2011 in der Übung besprochen

Aufgabe 1

Wir betrachten das lineare Modell $Y = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, mit $\beta \in \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_{102})$. Die beobachteten Daten liefern

$$X^T X = \begin{pmatrix} 102.000 & -12.883 \\ 12.883 & 538.204 \end{pmatrix}$$

sowie die Schätzungen $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^T = (\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_0) = (0.142, 1.953)$ und $\widehat{\sigma} = 0.898$.

(i) Bestimmen Sie Konfidenzintervalle jeweils für β_0, β_1 und σ^2 zum Niveau $\alpha = 0.05$.

(ii) Testen Sie die Hypothesen (a) bis (c). Geben Sie dazu die Teststatistik und deren Verteilung unter der Nullhypothese sowie den P-Wert inklusive Interpretation an.

(a) $H_0 : \beta_0 = 0$

(b) $H_0 : \beta_0 = \beta_1$.

(c) $H_0 : \beta_0 = 0.5$ und $\beta_1 = 2.5$

(iii) Bestimmen Sie zu $x_{103} = 5$ den zweiseitigen Vorhersagebereich für Y_{103}.

Hinweis: Um die benötigten Quantile zu berechnen, finden Sie z.B. auf der Vorlesungsseite einen Link.

Aufgabe 2

$X_1, \ldots X_n$ seien unabhängig und stetig gleichverteilt auf $[0, 1]$. Es bezeiche

$$R := X_{(n)} - X_{(1)}$$

die Spannweite, wobei $X_{(j)}$ die j-te Ordnungsstatistik ist. Zeigen Sie

(i) R besitzt die Dichte

$$f_R(y) = n\ (n-1)\ y^{n-2}\ (1-y)\ I_{[0,1]}(y),$$

(ii) $Y_n := 2n\ (1 - R)$ besitzt die Dichte

$$f_{Y_n}(y) = \frac{n-1}{4n}\ y\ \left(1 - \frac{y}{2n}\right)^{n-2} I_{[0,2n]}(y)$$

(iii) und

$$Y_n \xrightarrow{d} \chi_4^2.$$

Aufgabe 3

Sei $\boldsymbol{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma), \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d, p, q \leq d, B \in \mathbb{R}^{p \times d}$ mit vollem Rang, $C \in \mathbb{R}^{q \times d}$ mit vollem Rang. Zeigen Sie:

$$B\boldsymbol{X} \text{ und } C\boldsymbol{X} \text{ sind unabhängig}$$

$$\iff$$

$$B\Sigma C^T = 0$$