

4. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik SS 2011

keine Abgabe, Lösungen werden am 06.06.2011 in der Übung besprochen

Aufgabe 1

Sei $X_1, \dots, X_n$ eine u.i.v. Stichprobe der Gleichverteilung auf $(\theta, \theta + 1)$, wobei $n > 1$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Ferner bezeichne f_θ die Dichte von $X := (X_1, \dots, X_n)$.

(i) Zeigen Sie

$$T(X) := (\sup\{\theta \in \mathbb{R} : f_\theta(X) > 0\}, 1 + \inf\{\theta \in \mathbb{R} : f_\theta(X) > 0\})$$

ist suffizient ist für $\theta \in \mathbb{R}$.

(ii) Eine suffiziente Statistik U für $\theta \in \Theta$ heißt *minimal suffizient* genau dann wenn, für jede andere suffiziente Statistik S für $\theta \in \Theta$ eine messbare Funktion ψ existiert, so dass fast sicher $U = \psi(S)$ gilt. Ist T aus Teil (i) minimal suffizient?

Hinweis: Betrachten Sie die Ordnungsstatistiken $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$.

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{P} = \{f_\theta : \theta \in \Theta\}$, wobei f_θ für $\theta \in \Theta$ eine Dichte ist mit $f_\theta(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ferner ist $f_\theta(x)$ stetig in x für $\theta \in \Theta$ beliebig. X_1, X_2 seien u.i.v. mit Dichte f_θ . Zeigen Sie: Falls $X_1 + X_2$ suffizient ist für $\theta \in \Theta$, dann ist $\mathcal{P}$ eine Exponentialfamilie.

Hinweise:

1. Faktorisieren Sie die Dichte von $X := (X_1, X_2)$ gemäß dem Faktorisierungssatz von Neyman.
2. Definieren Sie die Funktion $r(x, \theta) := \log(f_\theta(x)) - \log(f_{\theta_0}(x))$ für $\theta_0 \in \Theta$ beliebig aber fix und zeigen Sie $r(x_1 + x_2, \theta) + r(0, \theta) = r(x_1, \theta) + r(x_2, \theta)$ für $x_j \in \mathbb{R}$.
3. Definieren Sie die Funktion $s(x_1, \theta) := r(x_1, \theta) - r(0, \theta)$ und zeigen Sie $s(x_1, \theta) = x_1 \cdot s(1, \theta)$ für $x_1 \in \mathbb{R}$.
4. Benutzen Sie die bisherigen Zwischenrechnungen um die Dichte in Form einer Exponentialfamilie zu schreiben.