5. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik SS 2011

keine Abgabe, Lösungen werden am 20.06.2011 in der Übung besprochen

Aufgabe 1

Sei $X_1, \dots, X_n$ eine u.i.v. Stichprobe der Gleichverteilung auf $(0, \theta)$, wobei $\theta > 0$. Die a priori Verteilung des Parameters sei gegeben durch die Lebesgue Dichte

$$f_T(\theta) = ba^b \theta^{-(b+1)} I_{(a, \infty)}(\theta)$$

mit $a, b > 0$ bekannt.

- (i) Interpretieren Sie das gegebene Modell.
- (ii) Eine a priori Verteilung (*engl. prior*) heißt *conjugate prior*, falls die a posteriori Verteilung zur selben Verteilungsfamilie wie die a priori Verteilung gehört. Zeigen Sie, dass hier der betrachtete prior ein conjugate prior ist.
- (iii) Bestimmen Sie die Bayesregel bzgl. der quadratischen Verlustfunktion.

Aufgabe 2

Sei $X_1, \dots, X_n$ eine u.i.v. Stichprobe der Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$. Ferner sei die a priori Verteilung die Gammaverteilung mit bekannten Parametern $\alpha, \beta > 0$, d.h. gegeben durch die Lebesgue Dichte

$$f_T(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda) I_{(0, \infty)}(\lambda).$$

- (i) Bestimmen Sie die Bayesregel bzgl. der quadratischen Verlustfunktion.
- (ii) Bezeichne ρ_0 die in (i) berechnete Bayesregel. Ist (im Fall $n = 1$) die Risikofunktion $R(\lambda, \rho_0)$ konstant für alle $\lambda > 0$ und somit nachgewiesen, dass ρ_0 auch die Minimaxregel ist?