Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H. Holzmann
G. Alexandrovich

Sommersemester 2013

Übungen zur vertiefenden mathematischen Statistik

Blatt 1

Abgabe: Montag, 22.04.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (V) Sei $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ mit Rang p und $X_{(i)} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times p}$ die Matrix, die entsteht, wenn in X die i'te Zeile $x_i^\top$ weggelassen wird. Seien weiterhin $\hat{\beta}_{(i)}$ und $\hat{\sigma}_{(i)}$ Schätzer im klassischen linearen Modell ohne die Komponente (Y_i, x_i), $h_{ii} = x_i^\top (X^\top X)^{-1} x_i$ und $\hat{\varepsilon}$ Vektor der Residuen. Zeigen Sie

i)
$$\hat{\beta}_{(i)} = \hat{\beta} - \frac{(X^\top X)^{-1} x_i \hat{\varepsilon}_i}{1 - h_{ii}},$$

ii)
$$\hat{\sigma}^2_{(i)} = \hat{\sigma}^2 \frac{n - p - r_i^2}{n - p - 1}$$

mit
$$r_i = \frac{\hat{\varepsilon}_i}{\hat{\sigma}(1 - h_{ii})^{\frac{1}{2}}}.$$

Aufgabe 2 (V) Zeigen Sie

$$\frac{(\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})^\top (X^\top X)(\hat{\beta}_{(i)} - \hat{\beta})}{p\hat{\sigma}^2} = \frac{r_i^2}{p} \frac{h_{ii}}{1 - h_{ii}}.$$

Aufgabe 3 Sei $A \in \mathbb{R}^{q\times p}$ mit Rang q, für $q \leq p$, $m \in \mathbb{R}^q$. Bestimmen Sie den KQ-Schätzer unter der Nebenbedingung $A\beta = m$.

Aufgabe 4 Seien $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ mit Rang p und $x_{ij} = 1$ für $j = 1$, $\bar{X}_j$ bzw. S_j^2 das empirische Mittel bzw. die empirische Varianz der j'ten Spalte von X. Sei weiterhin $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ mit

$$\tilde{x}_{ij} = \begin{cases} 1 & j = 1, \\ \frac{x_{ij} - \bar{X}_j}{S_j} & sonst. \end{cases}$$

Wie hängen der KQ-Schätzer $\hat{\beta}$ aus dem Ausgangsmodell mit Designmatrix X und der KQ-Schätzer $\tilde{\beta}$ aus dem Modell mit Designmatrix $\tilde{X}$ zusammen?