Übungen zur vertiefenden mathematischen Statistik

Blatt 10

Abgabe: Montag, 01.07.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (V) Seien X, Y zwei unabhängige, $Bin(n_1, p_1)$ - bzw. $Bin(n_2, p_2)$ -verteilte Zufallsvariablen mit bekannten Parametern n_1, n_2 und unbekanntem Erfolgswahrscheinlichkeiten p_1 bzw. p_2 .

Wir betrachten das Testproblem $H_0 : p_1 = p_2$ gegen $H_1 : p_1 \neq p_2$. Machen Sie einen Vortrag (30-40 min) über die Konstruktion eines UMPU-Tests zum obigen Testproblem. Gehen Sie dabei auch auf den verwandten Test auf Unabhängigkeit zweier Binomial-Verteilungen ein.

Literatur: Lehmann L. E.: *Testing Statistical Hypotheses* Springer, (2008).

Aufgabe 2 Seien F_1, F_2 Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: $F_1(x) \leq F_2(x) \quad \forall x \Leftrightarrow \int g(x)dF_2(x) \leq \int g(x)dF_1(x)$ für alle nicht fallenden Funktionen g .

Aufgabe 3 Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$ ein statistisches Modell, $\Theta \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{P}_\theta$ habe Dichte $f_\theta \forall \theta$. bzgl. eines σ -endlichen Maßes.

Zeigen Sie:

- i. $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ hat monotonen Dichtequotienten in X falls $\Theta = \mathbb{R}$ und f_θ ist Lebesgue-Dichte einer Gleichverteilung auf dem Intervall $(\theta, \theta + 1)$ mit bekanntem Parameter $c > 0$.
- ii. $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ hat keinen monotonen Dichtequotienten in X falls $\Theta = \mathbb{R}$ und f_θ ist Lebesgue-Dichte einer Cauchy-Verteilung mit Lokationsparameter θ und bekanntem Skalenparameter c .

Aufgabe 4 Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$ ein statistisches Modell, $\Theta \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ und $\mathbb{P}_\theta$ habe Dichte $f_\theta > 0$ bzgl. eines σ -endlichen Maßes für die $\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} \log f_\theta(x)$ existiert. Zeigen Sie: $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ hat monotonen Dichtenquotienten in X genau dann, wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- i. $\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} \log f_\theta(x) \geq 0$, für alle θ and x ,
- ii. $f_\theta(x) \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial x} f_\theta(x) \geq \frac{\partial}{\partial \theta} f_\theta(x) \frac{\partial}{\partial x} f_\theta(x)$.