

Übungen zur vertiefenden mathematischen Statistik

Blatt 11

Abgabe: Montag, 08.07.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (V) Wir betrachten folgende zweiparametrische Exponentialfamilie

$$\frac{dP_{(\theta_1, \theta_2)}}{d\mu}(x, y) = C(\theta_1, \theta_2)e^{\theta_1 x + \theta_2 y}.$$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ fest. Zeigen Sie: der einzige unverzernte Test zum Niveau α für das Testproblem: $H_0 : \theta_1 \leq a, \theta_2 \leq b$ gegen $H_1 : \theta_1 > a$ oder $\theta_2 > b$ oder beides, ist $\phi(x, y) \equiv \alpha$.

Hinweise

- Die Funktion $G_\phi(\theta_1, \theta_2)$ ist analytisch.
- Nehmen Sie o.E. an $a = b = 0$.
- Folgern Sie: $G_\phi(0, \theta_2) = \alpha$ für alle $\theta_2 \in \mathbb{R}$.
- Folgern Sie: $\frac{\partial G_\phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}(0, \theta_2) = 0$ für alle $\theta_2 \in \mathbb{R}$.
- Betrachten Sie schliesslich $\frac{\partial G_\phi(\theta_1, \theta_2)}{\partial \theta_1}(0, \theta_2)$ abwechselnd für positive und für negative θ_2 .

Aufgabe 2 Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine u.i.v. Stichprobe einer diskreten Gleichverteilung auf der Menge $\{1, \dots, \theta\}$ für ein $\theta \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das Testproblem $H_0 : \theta \leq \theta_0$ gegen $H_1 : \theta > \theta_0$, wobei $\theta_0 > 0$ bekannt. Zeigen Sie: der Test

$$T^*(X) = \begin{cases} 1 & X_{(n)} > \theta_0 \\ \alpha & X_{(n)} \leq \theta_0 \end{cases}$$

ist ein UMP-Test mit Umfang α .

Aufgabe 3 Sei X eine geometrisch-verteilte Zufallsvariable mit Parameter p . Konstruieren Sie zu gegebenem α einen UMPU-Test mit Umfang α für das Testproblem $H_0 : p = p_0$ gegen $H_1 : p \neq p_0$.