Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H. Holzmann
G. Alexandrovich

Sommersemester 2013

Übungen zur vertiefenden mathematischen Statistik

Blatt 2

Abgabe: Montag, 29.04.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (V) Seien $\mu \in \mathbb{R}^d$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ s.p.d., und $X_1, \dots, X_k$ unabhängig und identisch $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$-verteilt. Wir betrachten die Schätzer

$$\hat{\mu} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i,$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(X_i - \hat{\mu})(X_i - \hat{\mu})^{\mathsf{T}}.$$

Die Verteilung von $(k-1)\hat{\Sigma}$ ist die sog. *zentrale Wishart-Verteilung* mit Parametern $d, k-1$ und Σ: $W_d(k-1, \Sigma)$. Machen Sie einen kurzen Vortrag (ca. 15-20 min) über die Verteilung von $\hat{\mu}$ bzw. von $\hat{\Sigma}$ und gehen Sie dabei auch auf die Unabhängigkeit der beiden Schätzer ein.

Literatur: Chatfield, C., Collins, A.J.: *Introduction to Multivariate Analysis.* Chapman & Hall, (1980).

Aufgabe 2 Wir betrachten das lineare Model $Y = \beta_0 + \varepsilon,\ \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
Berechnen Sie P_X, $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\beta}$, $\beta_{(i)}$, h_{ii}, $\hat{\varepsilon}_i$ (siehe Vorlesung und Aufgabe 1, Blatt 1).

Aufgabe 3 Die Zufallsvariablen $Y_0, Y_1, \dots, Y_k$ seien unabhängig und identisch $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt.
Zeigen Sie: Die durch

$$X_k := \frac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Y_j^2}}$$

definierte Zufallsvariable besitzt die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

(sog. *t-Verteilung mit k Freiheitsgraden oder* t_k).

Bitte Wenden.

Hinweis: die Zufallsvariable $Z := \sum_{j=1}^{k} Y_j^2$ besitzt die Dichte

$$g(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x),$$

(sog. χ^2-*Verteilung mit k Freiheitsgraden*).

Aufgabe 4 Zeigen Sie: es gilt $t_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ für $k \to \infty$ und illustrieren Sie diese Aussage anhand einer Simulation in **R**.