Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H. Holzmann
G. Alexandrovich

Sommersemester 2013

Übungen zur vertiefenden mathematischen Statistik

Blatt 5

Abgabe: Montag, 20.05.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (V) Ein stochastischer Prozess $(N_t)_{t\geq 0}$ über einem W'Raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit rechtsseitig stetigen Pfaden heißt *Poisson-Prozess* mit Rate (oder Intensität) $\lambda > 0$, falls gilt: $(N_t)_{t\geq 0}$ besitzt f.s. stückweise konstante Pfade mit $N_0 = 0$ und Sprunghöhen 1 zu Sprungzeiten S_k, und die Zwischensprungzeiten $T_k := S_k - S_{k-1}$ $(S_0 := 0)$, $k \in \mathbb{N}$ sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ.

Zeigen Sie: Ist $(N_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Rate λ, dann gilt

i) $N_t \sim Poiss(\lambda t)$,

ii) $\mathbb{P}_{(S_1,\dots,S_n)|N_t=n} = \mathbb{P}_{(X_{(1)},\dots,X_{(n)})}$, [1]

wobei $X_1, \dots, X_n$ u.i.v. $U[0, t]$.

Die Größe T_k kann als Wartenzeit zwischen zwei aufeinander folgenden Ereignissen (z.B. Anrufen in einem Callcenter, Webseitenaufrufen etc..) interpretiert werden. S_k ist der Zeitpunkt des k-ten Ereignisses und N_t die Anzahl der Ereignisse, die bis zum Zeitpunkt t eingetreten sind. $(N_t)_{t\geq 0}$ ist ein sog. *Zählprozess*. Bemerkung: die Umkehrung dieser Aussage gilt auch.

Hinweise:

i) Zeigen Sie: Summe von n unabhängigen $exp(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen ist $\Gamma(\lambda, n)$-verteilt.

ii) Zeigen Sie: $f_{S_1,\dots,S_n}(s_1, \dots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda s_n}$

iii) Überlegen Sie sich, dass $\{N_t = n\} = \{S_n \leq t, S_{n+1} > t\}$ gilt.

Aufgabe 2 Sei $X_1, \dots, X_n$ eine u.i.v. Stichprobe der Gleichverteilung auf $(\theta, \theta+1)$, wobei $n > 1$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Ferner bezeichne f_θ die Dichte von $X := (X_1, \dots, X_n)$.

(i) Zeigen Sie

$$T(X) := (\sup\{\theta \in \mathbb{R} : f_\theta(X) > 0\}, 1 + \inf\{\theta \in \mathbb{R} : f_\theta(X) > 0\})$$

ist suffizient ist für $\theta \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden.

[1] Insbesondere hängt die bedingte Verteilung $\mathbb{P}_{(S_1,\dots,S_n)|N_t=n}$ nicht von λ ab $\to$ Suffizienz.

(ii) Eine suffiziente Statistik U für $\theta \in \Theta$ heißt *minimal suffizient* genau dann wenn, für jede andere suffiziente Statistik S für $\theta \in \Theta$ eine messbare Funktion ψ existiert, so dass fast sicher $U = \psi(S)$ gilt. Ist T aus Teil (i) minimal suffizient?

Hinweis: Betrachten Sie die Ordnungsstatistiken $X_{(1)}$ und $X_{(n)}$.

Aufgabe 3 Sei $\mathcal{P} = \{f_\theta : \theta \in \Theta\}$, wobei f_θ für $\theta \in \Theta$ eine Dichte ist mit $f_\theta(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ferner ist $f_\theta(x)$ stetig in x für $\theta \in \Theta$ beliebig. X_1, X_2 seien u.i.v. mit Dichte f_θ.
Zeigen Sie: Falls $X_1 + X_2$ suffizient ist für $\theta \in \Theta$, dann ist $\mathcal{P}$ eine Exponentialfamilie.

Hinweise:

1. Faktorisieren Sie die Dichte von $X := (X_1, X_2)$ gemäß dem Faktorisierungssatz von Neyman.
2. Definieren Sie die Funktion $r(x, \theta) := \log(f_\theta(x)) - \log(f_{\theta_0}(x))$ für $\theta_0 \in \Theta$ beliebig aber fix und zeigen Sie $r(x_1 + x_2, \theta) + r(0, \theta) = r(x_1, \theta) + r(x_2, \theta)$ für $x_j \in \mathbb{R}$.
3. Definieren Sie die Funktion $s(x_1, \theta) := r(x_1, \theta) - r(0, \theta)$ und zeigen Sie $s(x_1, \theta) = x_1 \cdot s(1, \theta)$ für $x_1 \in \mathbb{R}$.
4. Benutzen Sie die bisherigen Zwischenrechnungen um die Dichte in Form einer Exponentialfamilie zu schreiben.