Übungen zur vertiefenden mathematischen Statistik

Blatt 6

Abgabe: Montag, 03.06.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (V) Sei $X_1, \dots, X_n$ eine u.i. $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ -verteilte Stichprobe, $\mu \in \mathbb{R}^d, \Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ s.p.d.. Ein häufig verwendeter Bayes-Schätzer für den Parameter (μ, Σ) ist gegeben durch die a-priori Verteilung

$$\mu | \Sigma \sim \mathcal{N}(\mu_0, \Sigma / \kappa),$$

$$\Sigma \sim \mathcal{IW}(\nu_0, \nu_0 \Sigma_0),$$

wobei $\mu_0 \in \mathbb{R}^d, \Sigma_0 \in \mathbb{R}^{d \times d}$ s.p.d., $\kappa \in \mathbb{R}^+, \nu_0 > d + 1$ und $\mathcal{IW}$ die sog. *Inverse Wishartverteilung*

Machen Sie einen 30-40 minütigen Vortrag bei dem Sie das Bayes-Entscheidungsprinzip vorstellen und anhand dieses Beispiels erläutern.

Aufgabe 2 Sei ein statistisches Model $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P})_{\theta \in \Theta})$ gegeben. Wir betrachten ein Schätzproblem für $\vartheta \in [c, d] \subset \mathbb{R}$, $c, d \in \mathbb{R}$ seien bekannt. Der Aktionsraum A enthalte $[c, d]$ und die Verlustfunktion sei von der Form $l(\theta, a) = L(|\theta - a|)$ für eine steigende Funktion L auf $[0, \infty]$.

Zeigen Sie: Eine Entscheidungsregel T mit $\mathbb{P}_\theta(T \notin [c, d]) > 0$ für ein $\theta \in \Theta$ ist unzulässig.

Aufgabe 3 Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten $\mathbb{E}X_i = \mu$, endlichen Varianzen und paarweise unkorreliert. Wir betrachten die Schätzung von μ unter quadratischer Verlustfunktion. Zeigen Sie:

i) Es gibt keine optimale Entscheidungsregel in $\mathcal{T}$, falls $\mathcal{T}$ die Menge aller möglichen Entscheidungsregeln ist.

ii) Finden Sie die optimale Entscheidungsregel in $\mathcal{T}_2 = \{ \sum_{i=1}^n c_i X_i : c_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n c_i = 1 \}$, falls $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 / a_i$ mit unbekanntem σ und bekannten $a_i, i = 1, \dots, n$.