Übungen zur vertiefenden mathematischen Statistik

Blatt 7

Abgabe: Montag, 10.06.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (V) Wir sind in der Situation von Satz 3.13 der Vorlesung. Der sogenannte *positive-part James-Stein*-Schätzer ist gegeben durch

$$\hat{\mu}_{JS+} = \left(1 - \frac{\sigma_0(d-2)}{\|X\|_2^2}\right)^+ X,$$

wobei $x^+ = \max\{x, 0\}$. Für diesen Schätzer gilt: Für alle $d \geq 1$, $\mu \in \mathbb{R}^d$: $\mathbb{E}_\mu \|\hat{\mu}_{JS+} - \mu\|^2 < \mathbb{E}_\mu \|\hat{\mu}_{JS} - \mu\|^2$. Stellen Sie den Beweis dieser Aussage im Rahmen eines Vortrages (30-40 Minuten) vor.

Literatur: Tsybakov, A., B.: *Introduction to Nonparametric Estimation*. Springer, (2008).

Aufgabe 2 Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathcal{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$ ein statistisches Modell und $X \in \mathcal{X}$ eine Stichprobe. Seien, $T_1, \dots, T_{k+1}$ Schätzer für θ , so dass $\mathbb{E}_\theta T_i = \theta + \sum_{j=1}^k c_{i,j} b_j(\theta)$, $i = 1, \dots, k+1$. Dabei seien $c_{i,j} \in \mathbb{R}$ und b_j Funktionen von θ .

Angenommen

$$C = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_{1,1} & c_{2,1} & \dots & c_{k+1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1,k} & c_{2,k} & \dots & c_{k+1,k} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Zeigen Sie

$$T^* = \frac{1}{C} \det \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \dots & T_{k+1} \\ c_{1,1} & c_{2,1} & \dots & c_{k+1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1,k} & c_{2,k} & \dots & c_{k+1,k} \end{pmatrix}$$

ist ein unverzerrter Schätzer.

Aufgabe 3 Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathcal{P}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}})$ ein statistisches Modell und $\hat{\theta}$ ein unverzerrter Schätzer von θ . Zeigen Sie

1. Ein Schätzer der Form $\hat{\theta} + c$ für ein $c \neq 0$, kann unter quadratischer Verlustfunktion nur dann minimax sein, wenn $\sup_\theta R(\theta, \theta') = \infty$ für alle Schätzer θ' .
2. Ein Schätzer der Form $c\hat{\theta}$ für ein $0 < c < 1$, kann unter quadratischer Verlustfunktion nur dann minimax sein, wenn $\sup_\theta R(\theta, \theta') = \infty$ für alle Schätzer θ' .