

Übungen zur vertiefenden mathematischen Statistik

Blatt 9

Abgabe: Montag, 24.06.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (V) Sei $X_1, \dots, X_n$ eine u.i.v. Stichprobe einer Binomialverteilung mit unbekanntem Parameter p . Machen Sie einen Vortrag (30-40 min.) über den UMPU-Test der Hypothese $H_0 : p = p_0$ gegen $H_1 : p \neq p_0$. Gehen Sie dabei auf die Theorie zur Konstruktion von UMPU-Tests in einparametrischen Exponentialfamilien ein.

Vergleichen Sie die Power des UMPU-Tests (Funktion `umpu.binom()` aus dem R-Paket `ump`) mit der eines exakten Binomialtests (Funktion `binom.test()` aus dem Paket `stats`) im Rahmen einer Simulation.

Literatur: Lehmann L. E.: *Testing Statistical Hypotheses* Springer, (2008).

Aufgabe 2 Seien $f_1, \dots, f_{m+1}$ messbare Funktionen auf $\mathbb{R}^p$, integrierbar bezüglich eines σ -endlichen Maßes ν und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Seien

$$\mathcal{T} := \{\phi : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1] \mid \phi \text{ messbar}, \int \phi(x) f_i(x) d\nu(x) \leq \alpha_i, i = 1, \dots, m\},$$

$$\mathcal{T}_0 := \{\phi \in \mathcal{T} \mid \int \phi(x) f_i(x) d\nu(x) = \alpha_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Zeigen Sie: Falls Konstanten $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ existieren, s.d.

$$\phi^*(x) = \begin{cases} 1 & f_{m+1}(x) > \sum_{j=1}^m c_j f_j(x) \\ 0 & f_{m+1}(x) < \sum_{j=1}^m c_j f_j(x) \end{cases}$$

Element von $\mathcal{T}_0$ ist, dann maximiert ϕ^* das Integral $\int \phi(x) f_{m+1}(x) d\nu(x)$ über $\mathcal{T}_0$. Sind zusätzlich die Konstanten $c_j \geq 0$, so maximiert ϕ^* das Integral $\int \phi(x) f_{m+1}(x) d\nu(x)$ über $\mathcal{T}$.

Aufgabe 3 Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$ ein statistisches Modell und ϕ^* ein UMP-Test mit Umfang $\alpha \in (0, 1)$ für das Testproblem $H_0 : \theta = \theta_0$ gegen $H_1 : \theta = \theta_1$, für zwei bekannte Elemente $\theta_0, \theta_1 \in \Theta$. Sei $\beta = G_{\phi^*}(\theta_1) < 1$.

Zeigen Sie: Der Test $1 - \phi^*$ ist ein UMP-Test zum Niveau $1 - \beta$ für das Testproblem $H_0 : \theta = \theta_1$ gegen $H_1 : \theta = \theta_0$.