

Übungen zur Mathematik II

Blatt 1

Abgabe: Freitags vor der Vorlesung

Rechnen Sie mit natürlichen Zahlen wie gewohnt.

Montag 21.04.14 ist Feiertag. Die Teilnehmer der Montagstutorien sind eingeladen sich in ein anderes Tutorium reinzusetzen.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

i.
$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

ii.
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Zeigen Sie

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte, Bonusaufgabe) Zeigen Sie für natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}$: es gibt genau

$$\binom{n+k-1}{k}$$

verschiedene Möglichkeiten k nicht unterscheidbare Teilchen auf n Zellen zu verteilen, wobei jede Zelle beliebig viele Teilchen aufnehmen kann.

Hinweise: stellen Sie die Trennwände zwischen den Zellen mit $|$ und die Teilchen mit \bullet dar. Dann entspricht jeder Verteilung ein Muster der Form $\bullet\bullet|\bullet||\dots|\bullet\bullet$.

Für $n, k \in \mathbb{N}$ entspricht $\binom{n}{k}$ der Anzahl der Möglichkeiten k Elemente aus n Elementen auszuwählen, wobei die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (4 Punkte, Bonusaufgabe) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Überlegen Sie sich vorher über welche Variable die Induktion durchgeführt werden soll.