Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H. Holzmann
G. Alexandrovich

Sommersemester 2014

Übungen zur Mathematik II

Blatt 10

Abgabe: Freitag 27.06.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte) (*Additionstheoreme*). Betrachten Sie die Potenzreihen

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}.$$

Zeigen Sie mittels Cauchy-Produkt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

i. $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.

ii. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Berechnen Sie den exakten Wert von

i. $\cos\frac{\pi}{3}$.

ii. $\cos\frac{\pi}{6}$.

Hinweise: Nutzen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$.
- $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.
- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Zeigen Sie

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \quad \text{für alle } x, y, x+y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Aufgabe 1.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Beweisen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:

i. $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$.

ii. $\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$.

Hinweis: Nutzen Sie die Aufgabe 1.