Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H. Holzmann
G. Alexandrovich

Sommersemester 2014

Übungen zur Mathematik II

Blatt 11

Abgabe: Freitag 04.07.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte) Zeigen Sie:

i. $\ln(1+x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ für alle $x > 0$.

   Anleitung:
   - Betrachten Sie die Funktion $f(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$ im Intervall $[0, x]$.
   - Zeigen Sie: $f(x) = xf'(t_0)$ für ein $t_0 \in (0, x)$ (Mittelwertsatz).
   - Zeigen Sie: $f'(t) < 0$. Benutzen Sie dafür die Ungleichung $1 + \frac{t}{2} > \sqrt{1+t}$ für alle $t > -1$. (Bernoulli-Ungleichung mit reelen Exponenten.)
   - Folgern Sie die Aussage.

ii. $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1$, für alle $x > 1$.

   Hinweis: betrachten Sie die Funktion $f(t) = \ln(t)$ für $t \in (1, x)$ und benutzen Sie den Mittelwertsatz.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

i. Zeigen Sie $\arctan'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ für alle $x \in (-1, 1)$.

ii. Benutzen Sie Teilaufgabe i. um die Gleichheit $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ für alle $x \in (-1, 1)$ zu zeigen.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Differenzieren Sie folgende Funktionen:

i. $f(x) = \sin(x^2 + 1)$.

ii. $f(x) = \exp(x + \ln(x^2))$, $x > 0$.

iii. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{\sin(x) + 2}$.

vi. $f(x) = \ln(x)\tan(x^2)$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Bitte wenden.

Aufgabe 4 (1.5 + 1.5 + 1 Punkte) Betrachten Sie den verallgemeinerten Binominialkoeffizient:

$$\binom{a}{0} := 1, \quad \binom{a}{n} := \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}, \quad \forall\, a \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}.$$

i. Zeigen Sie: die Potenzreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n =: f(x)$$
konvergiert für $|x| < 1$. Nutzen Sie dafür das Quotientenkriterium und die Beziehung $\binom{a}{n+1} = \binom{a}{n} \frac{a-n}{n+1}$.

ii. Zeigen Sie: $(1+x)f'(x) = af(x)$.

iii. Zeigen Sie mit Teilaufgabe ii., dass $\frac{f(x)}{(1+x)^a}$ konstant 1 ist, indem Sie den Ausdruck ableiten. Folgern Sie: $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$.