Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H. Holzmann
G. Alexandrovich

Sommersemester 2014

Übungen zur Mathematik II

Blatt 2

Abgabe: Freitags vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte) Seien X, Y und Z Mengen und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen. Betrachten Sie die Abbildung $g \circ f : X \to Z$ definiert durch $g \circ f(x) := g(f(x))$.

i. Beweisen Sie:

   a. f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv.

   b. f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv.

ii. Begründen Sie mit Hilfe von Gegenbeispielen, dass die Umkehrungen der beiden Aussagen falsch sind.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Zeigen Sie:

i. $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)\sum\limits_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

ii. $\prod_{k=1}^{n}(n+k) = \prod_{k=1}^{n}(4k-2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Rechnen Sie die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ explizit nach und zeigen Sie anschliessend den allgemeinen Fall.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Finden Sie durch Probieren eine Formel für den Ausdruck $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und beweisen Sie diese anschliessend mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Seien X und Y Mengen. Zeigen Sie die Äquivalenz

i. $f : X \to Y$ injektiv $\Leftrightarrow \exists$ Funktion $g : Y \to X$, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

ii. $f : X \to Y$ surjektiv $\Leftrightarrow \exists$ Funktion $g : Y \to X$, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Das Symbol id_X steht für die identische Abbildung; $\mathrm{id}_X : X \to X, \quad x \mapsto x$.