Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H. Holzmann
G. Alexandrovich

Sommersemester 2014

Übungen zur Mathematik II

Blatt 4

Abgabe: Freitag 16.05.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte) Zeigen Sie für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_i \geq 0$ für alle i oder $x_i \in [-1, 0]$ für alle i:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \ldots + x_n.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Zeigen Sie für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $a > 0$. Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n}),$$

wobei $a_1 > 0$ beliebig.

i. (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend gegen $\sqrt{a}$ konvergiert. Beweisen und nutzen Sie dafür folgende Teilaussagen:
   - (0.5 Punkte) $a_n > 0$.
   - (1 Punkt) $a_n^2 \geq a$.
   - (1 Punkt) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$.
   - (0.5 Punkte) $\lim_{n\to\infty} a_n =: x$ existiert und es gilt $x^2 = a$.

ii. (1 Punkt) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{1 + \frac{\frac{b_n^2}{a} - 1}{2}},$$

wobei $b_1 > 0$ beliebig, konvergiert monoton steigend gegen gegen $\sqrt{a}$ (das ist nicht zu zeigen). Bestimmen Sie $\sqrt{2}$ auf 5 Nachkommastellen genau, indem sie hinreichend viele Folgenglieder a_n und b_n berechnen.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (4 Punkte + 2 Bonuspunkte) Betrachten Sie die Folge $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie folgende Aussagen

i. (0.5 Punkte) $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii. (1.5 Punkte) $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend für $n \geq 4$.

   - Führen Sie diese Aussage auf die äquivalente Aussage $n \geq (1 + \frac{1}{n})^n$ zurück.
   - Nutzen Sie dann $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ (kurz begründen).
   - Die Folge $((1 + \frac{1}{n})^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend (das ist nicht zu zeigen, s. Vorlesung).

iii. (2 Punkte + 2 Bonuspunkte) Folgern Sie, dass $(\sqrt[n]{n})_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert hat und bestimmen Sie ihn, indem Sie

   - annehmen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} > 1$ und
   - zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0$ gilt.