Philipps-Universität Marburg
Fachbereich Mathematik und Informatik
Prof. Dr. H. Holzmann
G. Alexandrovich

Sommersemester 2014

Übungen zur Mathematik II

Blatt 5

Abgabe: Freitag 23.05.2014 vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte) Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\geq 2}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \frac{(2-n)^2}{2n^2-2} \text{ und } b_n := (-1)^n(1-\frac{1}{n})^2 \text{ und } c_n := \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Untersuchen Sie jede Folge zunächst auf Beschränktheit und Monotonie und entscheiden Sie dann ob sie Häufungspunkte oder einen Grenzwert hat. Bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

Hinweis: Für c_n ist eine Multiplikation mit $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ hilfreich.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Beweisen Sie folgende Aussagen:

i. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a, so konvergiert auch die Folge der Beträge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Grenzwert ist $|a|$. Gilt auch die Umkehrung?

ii. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge (konvergent mit Grenzwert 0) und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ eine Nullfolge.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Beweisen Sie folgende Aussagen:

i. Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$ gibt es eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$, sodass $s < q < t$.

ii. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine rationale Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{Q}$, sodass

$$a_n < x \text{ für alle } n \text{ und } \lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Sei $x > 0$. Betrachten Sie die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n := x^{\frac{1}{2^n}},\ a_n := 2^n(x_n - 1) \text{ und } b_n := 2^n(1-\frac{1}{x_n}).$$

Zeigen Sie:

i. (2 Punkte) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend. Beweisen und nutzen Sie dafür folgende Teilaussagen:
   - Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $t^2 - 1 \geq 2(t-1)$ und damit
   - $x_n - 1 \geq 2(x_{n+1} - 1)$ und
   - $1 - \frac{1}{x_n} \leq 2(1 - \frac{1}{x_{n+1}})$.

Bitte wenden

ii. (1.5 Punkte) $b_1 \leq b_n \leq a_n \leq a_1$. Beweisen und nutzen Sie dafür folgende Teilaussagen:

- $a_n = x_n \cdot b_n$.
- $a_n \leq 0$ und $b_n \leq 0$ falls $0 < x \leq 1$.
- $a_n > 0$ und $b_n > 0$ falls $x > 1$.

iii. (0.5 Punkte) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und besitzen denselben Grenzwert. Hinweis: $\lim_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$ für alle $x > 0$.

Bemerkung: *Die Abhängigkeit der Folgenglieder von x wurde unterdrückt. Die Funktion* $x \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n =: \ln(x)$ *heißt natürlicher Logarithmus und wird später in der Vorlesung noch anders eingeführt.*